Przykładowe pytania z egzaminu licencjakiego

1. Definicja σ-ciała zdarzeń, prawdopodobieństwa (aksjomatyka Kołmogorowa), przestrzeni probabilistycznej.
2. Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór łańcuchowy.
3. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa.
4. Niezależności zdarzeń (łączna i parami), niezależność zmiennych losowych.
5. Schemat Bernoulliego, rozkład prawdopodobieństwa liczby sukcesów, twierdzenie Poissona.
6. Kowariancja i współczynnik korelacji zmiennych losowych, nierówność Schwarza, nieskorelowane zmienne losowe.
7. Rozkłady warunkowe zmiennych losowych, warunkowa wartość oczekiwana.
8. Zbieżność zmiennych losowych prawie na pewno (z prawdopodobieństwem 1), według prawdopodobieństwa, według rozkładów.
9. Mocne prawo wielkich liczb Kolmogorowa i Twierdzenie Gliwenki-Cantelliego.
10. Funkcje tworzące momenty (definicja, funkcja tworząca momenty sumy niezależnych zmiennych losowych, twierdzenie o ciągłości) i Centralne Twierdzenie Graniczne.
11. Podać definicję estymatora nieobciążonego. Podać przykład obciążonego i nieobciążonego estymatora wariancji.
12. Omówić wyznaczanie estymatorów metodą momentów. Podać przykład.
13. Podać definicję estymatora Metody Największej Wiarogodności. Podać przykład.
14. Omówić konstrukcję przedziałów ufności. Podać przykład.
15. Omówić testowanie hipotez statystycznych – przedstawić pojęcia: hipoteza zerowa i hipoteza alternatywna, błąd pierwszego i drugiego rodzaju, zbiór krytyczny.
16. Przedstawić testowanie hipotezy o wartości przeciętnej i o dwóch wartościach przeciętnych, w tym podać założenia, postać statystyki testowej i omówić podejmowanie decyzji.
17. Przedstawić testowanie hipotezy o wariancji i o dwóch wariancjach, w tym podać założenia, postać statystyki testowej i omówić podejmowanie decyzji.
18. Przedstawić testy zgodności: χ^2 (chi-kwadrat) i Kolmogorowa–Smirnowa, w tym podać założenia, postać statystyki testowej i omówić podejmowanie decyzji.

19. Przedstawić test niezależności χ^2 (ch-kwadrat), w tym podać założenia, postać statystyki testowej i omówić podejmowanie decyzji.
20. Omówić analizę regresji liniowej, w tym podać model, założenia i cel.
21. Definicja i przykłady przestrzeni liniowych.
22. Liniowa zależność i niezależność wektorów w przestrzeni liniowej.
23. Pojęcia bazy i wymiaru przestrzeni liniowej.
24. Pojęcie wyznacznika macierzy i jego własności.
25. Metoda Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych.
26. Przekształcenia liniowe i ich macierze.
27. Rząd macierzy i sposoby jego obliczania.
28. Pojęcia wektorów i wartości własnych przekształceń liniowych i macierzy.
29. Pojęcie przestrzeni euklidesowej.
30. Bazy ortogonalne i ortonormalne i ich przykłady.
31. Odległość między punktami na płaszczyźnie R^2 i w przestrzeni R^3.
32. Pojęcie wektora zaczepionego i swobodnego.
33. Działania na wektorach.
34. Iloczyn skalarny wektorów i jego związek z prostopadłością wektorów.
35. Równania wektorowe i ogólne prostej na płaszczyźnie.
36. Równanie wektorowe i ogólne płaszczyzny w przestrzeni.
37. Iloczyn wektorowy i jego własności.
38. Krzywe stożkowe i ich własności.
39. Przekształcenia izometryczne i ich przykłady.
40. Postać algebraiczna i postać trygonometryczna liczby zespolonej.
41. Czym jest pierwiastek n-tego stopnia z liczby zespolonej? Ile jest takich pierwiastków i jak się je wyznacza?
42. Podać definicje funkcji trygonometrycznych oraz funkcji wykładniczej w dziedzinie zespolonej oraz sformułować wzór Eulera. Co otrzymamy wstawiając do tego wzoru $z = \pi$?
43. Różniczkowalność i holomorficzność funkcji – wyjaśnić pojęcia. Jakiej klasy są funkcje holomorficzne?
44. Zdefiniować grupę, podgrupę, rząd grupy, rząd elementu. Zilustrować przykładami. Sformułować twierdzenie Lagrange'a.
45. Grupy permutacji, podstawowe pojęcia i własności.
46. Zdefiniować homomorfizmy grup, ich jądra i rodzaje. Opisać związek homomorfizmów z podgrupami normalnymi.
47. Pierścienie, pierścienie całkowite – podać definicje i omówić własności. Zilustrować przykładami.
48. Ideały, ich rodzaje i związek z homomorfizmami pierścieni.

49. Charakterystyka pierścienia całkowitego – definicja i własności.
50. Ciała, rzędy ciał, przykłady ciał skończonych.
51. Pierścienie wielomianów nad ciałami i ich własności.
52. Produkty grup i pierścieni. Grupy i pierścienie ilorazowe. Zilustrować przykładami.
53. Grupy i pierścienie ilorazowe – przykłady i własności.
54. Twierdzenie Pitagorasa i do niego odwrotne.
55. Twierdzenie Talesa i do niego odwrotne.
56. Cechy przystawania trójkątów.
57. Cechy podobieństwa trójkątów.
58. Twierdzenie kosinusów i jego dowód.
59. Twierdzenie sinusów i jego dowód.
60. Kąty wierzchołkowe, przyległe i naprzeciwległe.
61. Kąt środkowy i kąt wpisany oparte na tym samym łuku okręgu.
62. Pola powierzchni walca, kuli i stożka.
63. Objętości walca, kuli i stożka.
64. Wykonalność za pomocą cyrkla i liniału trysekcji kąta.
65. Wykonalność za pomocą cyrkla i liniału podwojenia sześcianu.
66. Wykonalność za pomocą cyrkla i liniału kwadratury koła.
67. Wykonalność za pomocą cyrkla i liniału konstrukcji wielokątów foremnych.
68. Uzasadnienie nieskończoności zbioru liczb pierwszych.
69. Małe Twierdzenie Fermata i Wielkie Twierdzenie Fermata.
70. Chińskie twierdzenie o resztach.
71. Istnienie wzorów na pierwiastki wielomianów.
72. Wzory Viete'a.
73. Zdefiniować podstawowe pojęcia kombinatoryczne: permutacje, wariacje, kombinacje.
74. Sformułować zasadę szufladkową Dirichleta i podać przykład jej użycia (zadanie lub twierdzenie ją wykorzystujące).
75. Opisać zasadę działania pętli *while*, *do-while* oraz *for*.
76. Co to są funkcje i procedury? W jaki sposób zdefiniować funkcję w języku *C#*?
77. Opisać stałopozycyjny kod uzupełnieniowy reprezentacji liczb całkowitych.
78. Omówić różnice pomiędzy listą jednokierunkową, listą dwukierunkową oraz tablicą.
79. Zastosowanie rekurencji w programowaniu.
80. Opisać metodę Newtona przybliżania rozwiązania równania nieliniowego.

81. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2.$$

82. Tautologie, metody wyznaczania tautologii. Wykazać, że wyrażenie $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ jest tautologią.
83. Udowodnić, że

$$\bigcup_{s\in S}(A_s \cap B_s) \subset \bigcup_{s\in S}\bigcup_{t\in S}(A_s \cap B_t)$$

Podać przykład świadczący o tym, że znaku inkluzji nie można zastąpić znakiem równości.
84. Podać przykład nieskończonego zbioru częściowo uporządkowanego, który ma element pierwszy, nie ma ostatniego, w którym każdy element ma następnik i każdy – poza pierwszym – ma poprzednik, przy czym zbiór ten nie jest podobny do zbioru N.
85. W zbiorze $N \times N$ definiujemy relację R wzorem

$$\langle k,l\rangle R\langle m,n\rangle \Leftrightarrow \max\{k,l\}=\max\{m,n\}$$

Udowodnić, że relacja R jest relacją równoważności. Jakiej postaci są klasy abstrakcji. Czy jakiekolwiek dwie różne klasy abstrakcji są równoliczne?
86. Skonstuować funkcję odwzorowującą odcinek $[0,1]$ na zbiór liczb naturalnych taką, że przeciwobraz każdej liczby naturalnej ma moc continuum.
87. Zbadać zbieżność ciągu stosując twierdzenie o ciągu monotonicznym, obliczyć jego granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2 n+4n}{3n-1}$$

88. Sformułować definicję Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie. Podać przykład funkcji ciągłej i przykład funkcji nieciągłej. Obliczyć granicę funkcji stosując poznane wzory lub stosując regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin 2x$$

89. Podać definicję funkcji pierwotnej. Zbadać różniczkowalność funkcji w punkcie $x_0=0$

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{dla } x\neq 0 \\ 0, & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

90. Wyznaczyć ekstrema funkcji

$$\frac{1}{1+x^2}$$

91. Stosując własność Darboux uzasadnić, że funkcja $4^x = x^2$ ma przynajmniej jedno miejsce zerowe w przedziale $x \in (-1, 0)$.

92. Podać definicję pochodnej, przykład funkcji różniczkowalnej i nieróżniczkowalnej. Obliczyć pochodną funkcji $e^{\cos x}$

93. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

94. Podać definicję sumy szeregu liczbowego. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n}$$

95. Zdefiniować szereg potęgowy i omówić zagadnienie rozwijania funkcji w szereg potęgowy. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $\cos^2 x$ i określić przedział zbieżności.

96. Sprawdzić, w jakich punktach równanie $F(x, y) = 0$ spełnia założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej, znaleźć ekstrema funkcji uwikłanej i określić ich typ: $F(x, y) = y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1$

97. Stosując metodę mnożników Lagrange'a wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji $f(x, y, z) = x^2+2y^2+3z^2$, przy warunku $x+y+z = 1$

98. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2 - x^2 - y^2$.

99. Stosując twierdzenie Greena obliczyć pole ograniczone przez elipsę $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

100. Długość, szerokość i wysokość prostopadłościanu zmierzone z dokładnością $5cm$ wynoszą odpowiednio $12m$, $4m$ i $3m$. Z jaką w przyblizeniu dokładnością można obliczyć długość przekątnej tego prostopadłościanu?