

Viktor KULYK Dariusz PĄCZKO

**WYBRANE ZAGADNIENIA
JAKOŚCIOWEJ TEORII RÓWNAŃ
RÓŻNICZKOWYCH**

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
GLIWICE 2011

Spis treści

Przedmowa	5
1. Podstawowe określenia i oznaczenia	7
2. Pewne własności regularnych liniowych rozszerzeń układów dynamicznych	20
3. Warunki wystarczające regularności liniowych rozszerzeń układów dynamicznych	30
4. Funkcje Lapunowa w teorii liniowych rozszerzeń układów dynamicznych	38
5. Pewne konstrukcje funkcji Lapunowa w teorii liniowych rozszerzeń układów dynamicznych	54
6. Dopełnienie słabo regularnych liniowych rozszerzeń do regularnych	63
7. Pewne uogólnienia metody dopełnienia słabo regularnych liniowych rozszerzeń do regularnych	76
8. Klasy ostro słabo regularnych liniowych rozszerzeń na torusie	88
9. Całkowa postać ograniczonych rozmaitości pewnych układów równań różniczkowych	93
Bibliografia	103

Przedmowa

Intensywne badania nieliniowych układów równań różniczkowych doprowadziły na początku lat 60-tych ubiegłego wieku do powstania teorii drgań quasi-okresowych [1, 3]. Najważniejszym tutaj osiągnięciem stała się tzw. KAM-teoria (skrót od pierwszych liter nazwisk: Kołmogorow, Arnold, Moser), obejmująca quasi-okresowe rozwiązania układów hamiltonowskich. Do rozwoju teorii przyczyniły się także prace N. N. Bogolubowa [2, 4], dotyczące quasi-okresowych rozwiązań słabo nieliniowych układów ogólnej postaci, oraz prace J. A. Mitropolskiego [16, 17], w których zanalizowano układy, opisujące quasi-okresowe drgania.

Badanie quasi-okresowych drgań jest dosyć trudnym zagadnieniem, ponieważ drgania te łatwo przechodzą w okresowe przez nieznaczne zaburzenie. Potwierdzają to doświadczenia, jak również teoretyczne wyniki jakościowej teorii równań różniczkowych. Fakt ten wymusza poszukiwanie mniej wrażliwego, niż quasi-okresowe rozwiązanie, obiektu badań teorii drgań. Takim obiektem stał się minimalny zbiór, w którym rekurentne trajektorie układu dynamicznego stanowią zbiór gęsty. Obecnie najbardziej zbadanymi minimalnymi zbiorami są zbiory toroidalne. Znaczącymi osiągnięciami w tym kierunku są prace N. N. Bogolubowa i N. M. Kryłowa [2, 9], w których rozpatrywano inwariantne toroidalne rozmaitości dla układów nieliniowej mechaniki. Wyniki te przyczyniły się do otrzymania przez J. A. Mitropolskiego metody całkowych rozmaitości w nieliniowej mechanice. Kontynuacją tej teorii są prace S. Diliberto [5, 6], J. Hale'a [8], J. Kurzweila [15]. Nowym kierunkiem stały się natomiast badania K. O. Fridrichsa, w których zajął się on okresowymi rozwiązaniami dodatnio symetrycznych układów nieliniowych równań cząstkowych [7]. Wyniki te, zastosowane w liniowych rozszerzeniach układów dynamicznych na torusie, stanowią swoistą teorię istnienia inwariantnych torusów dla tych układów.

J. Moser w latach 60-tych ubiegłego wieku, niezależnie od metody całkowych rozmaitości, otrzymał nowe wyniki o zachowaniu inwariantnego torusa przy zaburzeniach. Wykorzystał on mianowicie swoją szybko zbieżną metodę iteracji do nieliniowych dodatnio symetrycznych układów [18]. R. Sacker i G. Sell w pracy [23] kontynuowali badania J. Mosera. Dopiero praca A. M. Samoilenki [24] wyznaczyła nowy kierunek badań. Po raz pierwszy wprowadzono pojęcie funkcji Greena (Greena-Samoilenki), która dała możliwość zapisania inwariantnego torusa w postaci całkowej.

W konsekwencji pojawił się problem znalezienia warunków istnienia funkcji Greena [26]. Okazało się, że takim ogólnym warunkiem jest istnienie niezdegenerowanej formy kwadratowej, której pochodna wzdłuż rozwiązań układu jest dodatnio określona [25, 10,

19]. W porównaniu do dobrze znanej funkcji Lapunowa zauważmy, że forma ta może zmieniać znak.

Zastosowanie znakozmiennych funkcji Lapunowa w teorii regularnych na osi liniowych układów równań różniczkowych i liniowych rozszerzeniach układów dynamicznych na torusie jest dosyć perspektywicznym i aktualnym tematem, ponieważ badania te dają możliwość odpowiedzi na pytania o wielkość zaburzenia, które nie narusza właściwości regularności układów liniowych i liniowych rozszerzeń na torusie. Bez wątpienia można stwierdzić, że wyniki otrzymane w tym kierunku mają dość ważne znaczenie nie tylko w teorii inwariantnych rozmaitości, a także w teorii wieloczęstotliwościowych nieliniowych drgań, teorii optymalnego sterowania i teorii automatycznej regulacji.

W książce przedstawiono wyniki badań prowadzonych w ostatnich latach nad regularnością liniowych rozszerzeń układów dynamicznych (patrz [11, 12, 13, 14, 20]) oraz aktualny stan wiedzy w tym zakresie. Książka dodatkowo zawiera wiele interesujących nietrywialnych przykładów, których zbadanie może przyczynić się do otrzymania kolejnych ciekawych wyników. Przede wszystkim książka będzie przydatna dla studentów matematyki, pragnących pogłębić swoje zainteresowania w zakresie dychotomicznych równań różniczkowych lub piszących prace dyplomowe w tym kierunku.

1. Podstawowe określenia i oznaczenia

Rozpatrzmy układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ \frac{dy}{dt} = A(x)y, \end{cases} \quad (1.1)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ jest funkcją wektorową określoną dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^m$, spełniającą lokalnie warunek Lipschitza, tzn. dla dowolnego zbioru ograniczonego $D \subset \mathbb{R}^m$ istnieje stała L taka, że

$$\|f(x) - f(\bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|,$$

dla wszystkich $x, \bar{x} \in D$. Oprócz tego będziemy zakładać, że funkcja $f(x)$ spełnia nierówność

$$\|f(x)\| \leq \alpha_1\|x\| + \alpha_2,$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^m$ z pewnymi nieujemnymi stałymi α_1, α_2 . Przestrzeń takich funkcji będziemy oznaczać przez $C_{\text{Lip}}(\mathbb{R}^m)$.

Poczynione założenia pozwalają stwierdzić, że zadanie Cauchy'ego

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ x|_{t=0} = x_0, \end{cases}$$

ma jedyne rozwiązanie $x = x(t; x_0)$ dla każdego ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}^m$, określone dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ (patrz [21]).

Zakładamy, że macierz $A(x)$ jest kwadratowa o wymiarach $n \times n$, której elementami są skalarne funkcje rzeczywiste, określone, ciągłe i ograniczone na \mathbb{R}^m .

W dalszej części będziemy używać następujących oznaczeń:

$C^0(\mathbb{R}^m)$ oznacza przestrzeń funkcji rzeczywistych, ciągłych i ograniczonych na \mathbb{R}^m ,

$\langle y, \bar{y} \rangle = \sum_{j=1}^n y_j \bar{y}_j$ oznacza iloczyn skalarny w \mathbb{R}^n ,

$\|y\| = \sqrt{\langle y, y \rangle}$ oznacza normę wektora $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|A\| = \max_{\|y\|=1} \|Ay\|,$$

$$\|A\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \|A(x)\|,$$

$\Omega_\tau^t(x_0)$ to macierz fundamentalna liniowego układu równań:

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t; x_0))y, \quad (1.2)$$

normowana w punkcie $t = \tau$, tzn. $\Omega_\tau^t(x_0)\big|_{t=\tau} = I_n$, gdzie I_n jest n -wymiarową macierzą jednostkową,

$C'(\mathbb{R}^m, f)$ oznacza podprzestrzeń przestrzeni $C^0(\mathbb{R}^m)$ takich funkcji $F(x)$, że superpozycja (funkcja złożona) $F(x(t; x))$ jako funkcja zmiennej t jest funkcją różniczkowalną w sposób ciągły względem zmiennej $t \in \mathbb{R}$, przy czym

$$\dot{F}(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dt} F(x(t; x)) \Big|_{t=0}, \quad \dot{F}(x) \in C^0(\mathbb{R}^m).$$

Uwaga 1.1. Często w rozwiązaniu zadania Cauchy'ego $x = x(t; x_0)$ **indeks zero jest opuszczany i nie jest zapisywany.**

Razem z układem (1.1) będziemy rozpatrywać niejednorodny układ równań:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ \frac{dy}{dt} = A(x)y + h(x), \end{cases} \quad (1.3)$$

gdzie $h(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$.

Definicja 1.1. Będziemy mówić, że układ (1.3) ma ograniczoną inwariantną rozmierność wyznaczoną równością:

$$y = u(x), \quad (1.4)$$

jeśli funkcja $u(x) \in C'(\mathbb{R}^m, f)$ oraz spełniona jest tożsamość:

$$\dot{u}(x) \equiv A(x)u(x) + h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m. \quad (1.5)$$

Definicja 1.2. Jeżeli istnieje $n \times n$ -wymiarowa macierz $C(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ taka, że dla funkcji $G_0(\tau, x)$ postaci:

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)C(x(\tau; x)), & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(x) \left[C(x(\tau; x)) - I_n \right], & \tau > 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

spełnione jest oszacowanie:

$$\|G_0(\tau, x)\| \leq K e^{-\gamma|\tau|}, \quad (1.7)$$

gdzie K i γ są pewnymi dodatnimi stałymi, to funkcję określoną wzorem (1.6) nazywamy funkcją Greena zadania o ograniczonej inwariantnej rozmierności układu (1.1).

Istnienie funkcji Greena (1.6) pozwala stwierdzić, że układ (1.3) ma ograniczoną inwariantną rozmierność (1.4) dla każdej ustalonej funkcji $h(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$, którą można zapisać w postaci całkowej:

$$y = u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, x) h(x(\tau; x)) d\tau. \quad (1.8)$$

Aby się o tym przekonać, zapiszmy złożenie:

$$\begin{aligned} u(x(t; x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, x(t; x)) h(x(\tau, x(t; x))) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_t(t + \tau, x) h(x(t + \tau, x)) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau, x) h(x(\tau; x)) d\tau, \end{aligned}$$

gdzie

$$G_t(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(x) C(x(\tau; x)), & \tau \leq t, \\ \Omega_\tau^t(x) [C(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > t. \end{cases} \quad (1.9)$$

Otrzymujemy stąd:

$$u(x(t; x)) = \int_{-\infty}^t \Omega_\tau^t(x) C(x(\tau; x)) h(x(\tau; x)) d\tau + \int_t^{+\infty} \Omega_\tau^t(x) [C(x(\tau; x)) - I_n] h(x(\tau; x)) d\tau.$$

W ten sposób funkcja $y = u(x(t; x))$ jest ograniczonym rozwiązaniem niejednorodnego układu równań:

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t; x))y + h(x(t; x)),$$

skąd wynika tożsamość (1.5).

Uwaga 1.2. Ponieważ w strukturę funkcji Greena (1.6) nie wchodzi funkcja $h(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$, to istnienie takiej funkcji zależy tylko od układu (1.1).

Uwaga 1.3. Spełnienie oszacowania (1.7) jest równoważne spełnieniu oszacowania:

$$\|G_t(0, x)\| \leq K e^{-\gamma|t|} \quad (1.10)$$

dla pomocniczej funkcji

$$G_t(0, x) = \begin{cases} \Omega_0^t(x) C(x), & t \geq 0, \\ \Omega_0^t(x) [C(x) - I_n], & t < 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Faktycznie, jeśli spełnione jest oszacowanie (1.10), to podstawiając w miejsce x do lewej strony nierówności $x(z, x)$, otrzymujemy:

$$\|G_{t+z}(z, x)\| \leq K e^{-\gamma|t|} = K e^{-\gamma|(t+z)-z|}.$$

Ponieważ zmienne t, z zmieniają się niezależnie na \mathbb{R} , to mamy:

$$\|G_t(\tau, x)\| \leq K e^{-\gamma|t-\tau|}.$$

Stąd wynika oszacowanie (1.7). Podobnie można pokazać, że z oszacowania (1.7) wynika oszacowanie (1.10).

Uwaga 1.4. Jeśli układ (1.1) ma funkcję Greena (1.6), to układ niejednorodny:

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t; x))y + h(t), \quad (1.12)$$

ma ograniczone na osi \mathbb{R} rozwiązanie $y = y(t; x)$ dla każdej ustalonej funkcji $h(t)$ ciągłej (przedziałami ciągłej) i ograniczonej na \mathbb{R} . Rozwiązanie to zapisuje się w postaci całkowej:

$$y(t; x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(\tau, x) h(\tau) d\tau.$$

Uwaga 1.5. Funkcja (1.9) jest funkcją Greena zadania o ograniczonych rozwiązaniach układu $\frac{dy}{dt} = A(x(t; x))y$ dla każdej ustalonej wartości $x \in \mathbb{R}^m$.

Wniosek 1.1. *Jeśli niejednorodny liniowy układ (1.12) dla pewnej ustalonej wartości $x \in \mathbb{R}^m$ i dla pewnej funkcji $h(t)$ ciągłej i ograniczonej na \mathbb{R} nie ma ograniczonego rozwiązania, to układ (1.1) nie ma funkcji Greena (1.6).*

Rozważmy następujące przykłady.

PRZYKŁAD 1.1. Weźmy pod uwagę następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2, \\ \frac{dy}{dt} = y \operatorname{tgh}(3x_1 - 4x_2). \end{cases} \quad (1.13)$$

Rozwiązania dwóch pierwszych równań: $x_1 = t + x_{10}$, $x_2 = 2t + x_{20}$, podstawiamy do trzeciego, otrzymując:

$$\frac{dy}{dt} = y \operatorname{tgh}(-5t + \bar{x}),$$

gdzie $\bar{x} = 3x_{10} - 4x_{20}$. Wyznamy funkcję $\Omega_0^t(x)$, która ma postać:

$$\Omega_0^t(\bar{x}) = e^{\int_0^t \frac{e^{-5z+\bar{x}} - e^{5z-\bar{x}}}{e^{-5z+\bar{x}} + e^{5z-\bar{x}}} dz} = \left(\frac{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}}{e^{-5t+\bar{x}} + e^{5t-\bar{x}}} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

Znajdziemy teraz taką funkcję $C(\bar{x}) \in C^0(\mathbb{R})$, dla jakiej spełniony będzie warunek (1.10). W naszym przypadku mamy:

$$\begin{cases} \left(\frac{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}}{e^{-5t+\bar{x}} + e^{5t-\bar{x}}} \right)^{\frac{1}{5}} |C(\bar{x})| \leq K e^{-\gamma t}, & t \geq 0, \\ \left(\frac{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}}{e^{-5t+\bar{x}} + e^{5t-\bar{x}}} \right)^{\frac{1}{5}} |C(\bar{x}) - 1| \leq K e^{\gamma t}, & t < 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Podstawiając $\gamma = 1$, zapisujemy nierówności (1.14) w następującej postaci:

$$\begin{cases} |C(\bar{x})| \leq K \left(\frac{e^{-10t+\bar{x}} + e^{-\bar{x}}}{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}} \right)^{\frac{1}{5}}, & t \geq 0, \\ |C(\bar{x}) - 1| \leq K \left(\frac{e^{\bar{x}} + e^{10t-\bar{x}}}{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}} \right)^{\frac{1}{5}}, & t < 0. \end{cases}$$

Przechodząc odpowiednio w otrzymanych nierównościach z $t \rightarrow +\infty$ i $t \rightarrow -\infty$, otrzymujemy:

$$\begin{cases} |C(\bar{x})| \leq K \left(\frac{e^{-\bar{x}}}{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}} \right)^{\frac{1}{5}}, & t \geq 0, \\ |C(\bar{x}) - 1| \leq K \left(\frac{e^{\bar{x}}}{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}} \right)^{\frac{1}{5}}, & t < 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Oczywiście każda funkcja $C(\bar{x})$, spełniająca jednocześnie dwie nierówności (1.15), będzie również spełniała (1.14) dla $\gamma = 1$. Wśród takich funkcji $C(\bar{x})$ można przykładowo wybrać następujące:

$$\frac{e^{-\bar{x}}}{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}}, \left(\frac{e^{-\bar{x}}}{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}} \right)^2, \dots, \left(\frac{e^{-\bar{x}}}{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}} \right)^n, \dots$$

Wybierając pierwszą z nich, zapiszmy jedną z funkcji Greena dla układu (1.13):

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \left(\frac{e^{-5\tau+\bar{x}} + e^{5\tau-\bar{x}}}{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}} \right)^{\frac{1}{5}} \frac{e^{5\tau-\bar{x}}}{e^{-5\tau+\bar{x}} + e^{5\tau-\bar{x}}}, & \tau \leq 0, \\ - \left(\frac{e^{-5\tau+\bar{x}} + e^{5\tau-\bar{x}}}{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}} \right)^{\frac{1}{5}} \frac{e^{-5\tau+\bar{x}}}{e^{-5\tau+\bar{x}} + e^{5\tau-\bar{x}}}, & \tau > 0. \end{cases}$$

PRZYKŁAD 1.2. Weźmy teraz pod uwagę następujący układ równań:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dy}{dt} = (\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x)y. \end{cases} \quad (1.16)$$

Układ (1.2) można zapisać w postaci równania skalarnego:

$$\frac{dy}{dt} = (\sin(t+x_0) + \sin^2(t+x_0) + \sin^3(t+x_0))y.$$

Wyznamy skalarną funkcję $\Omega_0^t(x)$. Mamy:

$$\begin{aligned} \Omega_0^t(x) &= e^{\int_0^t (\sin(z+x) + \sin^2(z+x) + \sin^3(z+x)) dz} = \\ &= e^{\frac{1}{2}t - 2 \cos(t+x) - \frac{1}{4} \sin 2(t+x) + \frac{1}{3} \cos^3(t+x) + 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{3} \cos^3 x}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega_0^t = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Omega_0^t = 0$, to do postaci funkcji (1.11) można tylko wybrać $C(x) \equiv 0$. W ten sposób funkcja Greena (1.6) układu (1.16) jest jedyna i ma postać:

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0, \\ -e^{-\frac{1}{2}\tau + 2 \cos(\tau+x) + \frac{1}{4} \sin 2(\tau+x) - \frac{1}{3} \cos^3(\tau+x) - 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos^3 x}, & \tau > 0. \end{cases}$$

PRZYKŁAD 1.3. Rozważmy układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dy}{dt} = (\sin x + \sin^3 x)y. \end{cases}$$

Rozpatrywany układ nie ma funkcji Greena, ponieważ niejednorodne równanie, które odpowiada układowi (1.12), ma postać:

$$\frac{dy}{dt} = (\sin(t + x_0) + \sin^3(t + x_0))y + 1.$$

Równanie to nie ma ograniczonych rozwiązań, ponieważ z tego, że

$$\int_0^{2\pi} (\sin(\tau + x_0) + \sin^3(\tau + x_0)) d\tau = 0,$$

wniosujemy, że

$$\int_0^t (\sin(\tau + x_0) + \sin^3(\tau + x_0)) d\tau,$$

jest ograniczona.

Uwaga 1.6. Jeśli istnieje taka wartość $x_0 \in \mathbb{R}^m$, dla której prawa strona układu (1.1) przyjmuje wartość zero, $f(x_0) = 0$, $A(x_0) = 0$, to układ (1.1) nie ma funkcji Greena (1.6).

PRZYKŁAD 1.4. Rozpatrzmy układ równań różniczkowych mający postać:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin 4x, \\ \frac{dy}{dt} = y \cos 10x. \end{cases}$$

Rozpatrywany układ nie ma funkcji Greena, ponieważ dla wartości $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ spełnione są równości $\sin 4x_0 = \cos 10x_0 = 0$.

PRZYKŁAD 1.5. Weźmy pod uwagę następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = \cos x_1 \cos x_2 \sin x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = \cos x_1 \sin x_2, \\ \frac{dy}{dt} = (\lambda \sin x_3)y, \quad \lambda = \text{const} \neq 0. \end{cases}$$

Rozpatrywany układ również nie ma funkcji Greena, ponieważ dla wartości $x_0 = (\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ prawa strona układu będzie równa zero.

PRZYKŁAD 1.6. Rozpatrzmy układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3) \cos x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3) \cos x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_2, x_3) \cos x_1, \\ \frac{dy}{dt} = \left(f_4(x_1, x_2, x_3) \cos x_2 + f_5(x_1, x_2, x_3) \sin x_3 \right) y, \end{cases}$$

gdzie $f_j(x_1, x_2, x_3) \in C_{\text{Lip}}(\mathbb{R}^3) \cap C^0(\mathbb{R}^3)$ są dowolnymi funkcjami. W punkcie $x_0 = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$ prawa strona układu będzie równa zero, zatem układ także nie ma funkcji Greena.

PRZYKŁAD 1.7. Przedyskutujemy teraz układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \omega_1 \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = \omega_2 \cos x_1 \cos x_2 \sin x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = \omega_3 \cos x_1 \sin x_2, \\ \frac{dy}{dt} = \left(\lambda_1 \sin(x_1 + \Delta_1) + \lambda_2 \sin(x_2 + \Delta_2) + \lambda_3 \sin(x_3 + \Delta_3) \right) y, \end{cases}$$

gdzie $\omega_j, \lambda_j, \Delta_j$ są pewnymi stałymi.

Niech spełniona będzie nierówność $|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}| \leq 1$. Wówczas wybieramy rozwiązanie pierwszych trzech równań: $x_1 \equiv c = \text{const}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \tilde{c}t$, gdzie stała c jest rozwiązaniem równania: $\lambda_1 \sin(c + \Delta_1) + \lambda_2 \sin(\frac{\pi}{2} + \Delta_2) = 0$, a $\tilde{c} = \omega_3 \cos c$. Rozwiązanie to wstawiamy do czwartego równania. Zauważmy teraz, że niejednorodne równanie:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\lambda_3 \sin(\tilde{c}t + \Delta_3) \right) y + h(t),$$

nie dla każdej ograniczonej funkcji $h(t) \in C^0(\mathbb{R})$ ma ograniczone rozwiązanie. Przykładowo dla $h(t) \equiv 1$.

Jeśli $|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}| > 1$, wybieramy rozwiązanie pierwszych trzech równań: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 \equiv d = \text{const}$, $x_3 \equiv -\Delta_3$, gdzie stała d jest rozwiązaniem równania: $\lambda_1 \sin(\frac{\pi}{2} + \Delta_1) + \lambda_2 \sin(d + \Delta_2) = 0$. Podstawiając to rozwiązanie do czwartego równania można zauważyć, że niejednorodne równanie:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \cdot y + h(t),$$

nie dla każdej ograniczonej funkcji $h(t) \in C^0(\mathbb{R})$ ma ograniczone rozwiązanie. Przykładowo dla $h(t) \equiv 1$.

Definicja 1.3. Układ równań (1.1) nazywa się regularnym, jeśli istnieje dla niego jedna funkcja Greena (1.6). Jeśli wiadomo tylko, że istnieje dla niego przynajmniej jedna

funkcja Greena, to układ (1.1) nazywa się słabo regularnym. W przypadku kiedy istnieje nieskończenie wiele funkcji Greena (1.6) dla układu (1.1), to układ taki nazywamy ostro słabo regularnym.

Uwaga 1.7. Układ (1.1) przyjęto nazywać liniowym rozszerzeniem.

Rozpatrzmy następujący przykład.

PRZYKŁAD 1.8. Weźmy pod uwagę układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin x, \\ \frac{dy}{dt} = 2(\cos x)y. \end{cases} \quad (1.17)$$

Rozwiązania pierwszego równania zapiszmy w postaci:

$$\begin{aligned} x(t; x_0) &\equiv \pi m, & x_0 &= \pi m, & m &\in \mathbb{Z}, \\ \left| \operatorname{tg} \frac{x(t; x_0)}{2} \right| &= \left| \operatorname{tg} \frac{x_0}{2} \right| \cdot e^t, & x_0 &\neq \pi m. \end{aligned}$$

Podstawiając te rozwiązania do drugiego równania i zastępując x_0 przez x (aby uprościć zapis), otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dt} = 2 \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - e^{2t} \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + e^{2t} \sin^2 \frac{x}{2}} y.$$

Zapiszmy funkcję

$$\Omega_\tau^t(x) = e^{2 \int_\tau^t \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - e^{2z} \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + e^{2z} \sin^2 \frac{x}{2}} dz} = \left(\frac{e^{-\tau} \cos^2 \frac{x}{2} + e^\tau \sin^2 \frac{x}{2}}{e^{-t} \cos^2 \frac{x}{2} + e^t \sin^2 \frac{x}{2}} \right)^2. \quad (1.18)$$

Założmy teraz, że istnieje ciągła skalarna funkcja $C(x)$, dla której spełnione są oszacowania

$$\begin{cases} \Omega_0^t(x) |C(x)| \leq K e^{-2t}, & t \geq 0, \\ \Omega_0^t(x) |C(x) - 1| \leq K e^{2t}, & t < 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

z pewną dodatnią stałą K . Podstawiając (1.18) do (1.19), otrzymujemy

$$\begin{cases} |C(x)| \leq K e^{-2t} \left(e^{-t} \cos^2 \frac{x}{2} + e^t \sin^2 \frac{x}{2} \right)^2, & t \geq 0, \\ |C(x) - 1| \leq K e^{2t} \left(e^{-t} \cos^2 \frac{x}{2} + e^t \sin^2 \frac{x}{2} \right)^2, & t < 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

Przechodząc odpowiednio w ostatnich nierównościach do granicy z $t \rightarrow +\infty$ i $t \rightarrow -\infty$, będziemy mieć

$$\begin{cases} |C(x)| \leq K \left(\sin^2 \frac{x}{2} \right)^2, \\ |C(x) - 1| \leq K \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right)^2. \end{cases} \quad (1.21)$$

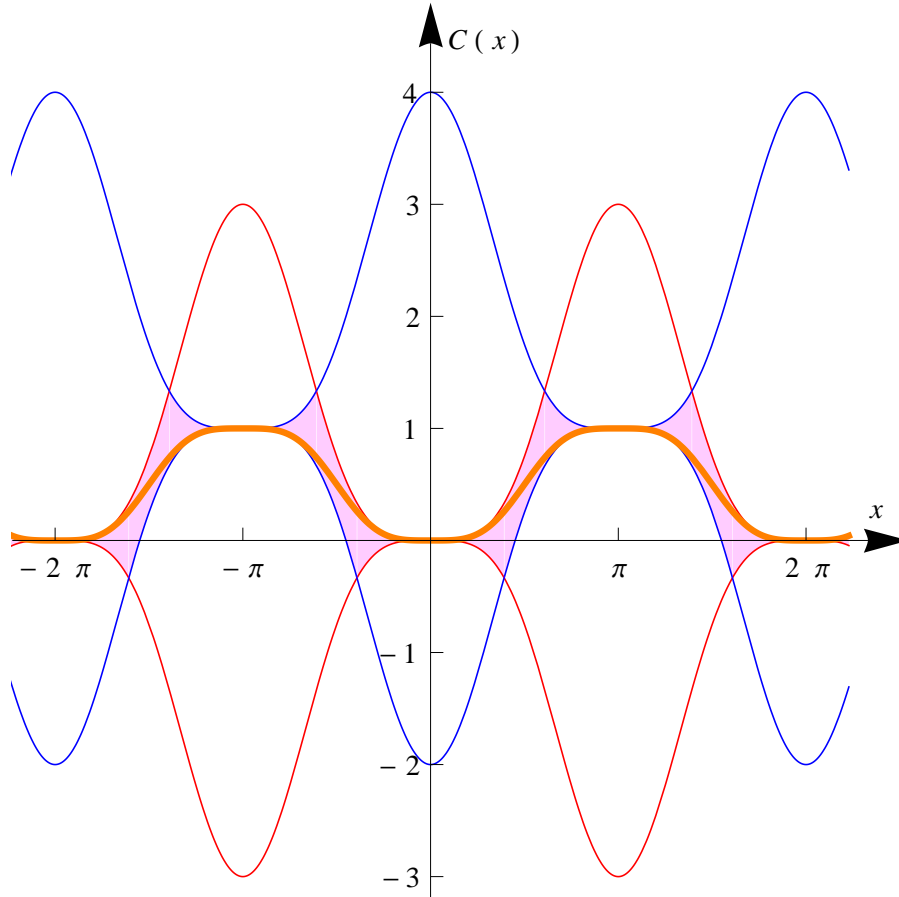
Jasne jest, że każda funkcja $C(x)$, spełniająca układ nierówności (1.21), będzie także spełniała warunki (1.20), (1.19). Zauważmy, że jedną z takich funkcji może być funkcja

$$C(x) = -2 \sin^6 \frac{x}{2} + 3 \sin^4 \frac{x}{2}. \quad (1.22)$$

Faktycznie, obliczając

$$C(x) - 1 = -2\left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right)^3 + 3\left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right)^2 - 1 = 2 \cos^6 \frac{x}{2} - 3 \cos^4 \frac{x}{2},$$

łatwo się przekonać, że spełnione będą dwa warunki (1.21), przy czym można wybrać stałą $K = 3$. Wykres funkcji (1.22) oraz ograniczeń (1.21) przedstawiono na rysunku 1.1.



Rys. 1.1. Wykres funkcji (1.22) oraz ograniczeń (1.21)

dla $K = 3$.

Wyznaczając superpozycję dla funkcji (1.22), mamy:

$$C(x(t; x)) = -2\left(\frac{e^t \sin^2 \frac{x}{2}}{e^{-t} \cos^2 \frac{x}{2} + e^t \sin^2 \frac{x}{2}}\right)^3 + 3\left(\frac{e^t \sin^2 \frac{x}{2}}{e^{-t} \cos^2 \frac{x}{2} + e^t \sin^2 \frac{x}{2}}\right)^2$$

$$C(x(t; x)) - 1 = 2\left(\frac{e^{-t} \cos^2 \frac{x}{2}}{e^{-t} \cos^2 \frac{x}{2} + e^t \sin^2 \frac{x}{2}}\right)^3 - 3\left(\frac{e^{-t} \cos^2 \frac{x}{2}}{e^{-t} \cos^2 \frac{x}{2} + e^t \sin^2 \frac{x}{2}}\right)^2.$$

W ten sposób jedna z funkcji Greena dla układu (1.17) ma postać

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} 3e^{2\tau} \sin^4 \frac{x}{2} - 2 \frac{e^{3\tau} \sin^6 \frac{x}{2}}{e^{-\tau} \cos^2 \frac{x}{2} + e^{\tau} \sin^2 \frac{x}{2}}, & \tau \leq 0, \\ -3e^{-2\tau} \cos^4 \frac{x}{2} + 2 \frac{e^{-3\tau} \cos^6 \frac{x}{2}}{e^{-\tau} \cos^2 \frac{x}{2} + e^{\tau} \sin^2 \frac{x}{2}}, & \tau > 0. \end{cases}$$

Uwaga 1.8. Jeżeli układ (1.1) ma jedną funkcję Greena (1.6), to macierz $C(x)$ spełnia następujące dwie tożsamości:

$$C^2(x) \equiv C(x), \quad C(x(t; x)) \equiv \Omega_0^t(x)C(x)\Omega_t^0(x). \quad (1.23)$$

Jeśli układ (1.1) ma nieskończenie wiele różnych funkcji Greena (1.6), to dla żadnej z macierzy $C(x)$ nie będzie spełniona żadna tożsamość (1.23).

Uwaga 1.9. W układzie (1.1) zakłada się, że macierz $A(x)$ jest ograniczona na \mathbb{R}^m . Istnieją przykłady układu (1.1) z nieograniczoną macierzą $A(x)$, dla których układ (1.3) ma ograniczoną inwariantną rozmaitość (1.4) dla każdej ograniczonej funkcji $h(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$.

PRZYKŁAD 1.9. Rozpatrzmy następujący układ dwóch równań:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dy}{dt} = (1 + x + x^2)y + h(x). \end{cases} \quad (1.24)$$

Pokażemy, że nie zważając na nieograniczoną współczynnik $A(x) = 1 + x + x^2$, dla każdej ustalonej funkcji $h(x) \in C^0(\mathbb{R})$ układ (1.24) ma jedną ograniczoną rozmaitość (1.4). W tym celu rozwiązanie pierwszego równania $x(t; x) = t + x$ podstawimy do drugiego, otrzymując:

$$\frac{dy}{dt} = (1 + (t + x) + (t + x)^2)y + h(t + x).$$

Następnie, zapiszmy rozwiązanie ogólne, które ma postać

$$y = e^{\int_0^t (1 + (\sigma + x) + (\sigma + x)^2) d\sigma} \left[c + \int_0^t h(\tau + x) e^{-\int_0^\tau (1 + (\sigma + x) + (\sigma + x)^2) d\sigma} d\tau \right],$$

gdzie c może zależeć tylko od x . Załóżmy, że istnieje taka wartość $c = c^*$, że odpowiednie rozwiązanie $y = y^*(t)$ jest ograniczone na \mathbb{R} . Zapiszmy wtedy równość:

$$y^*(t) e^{-\int_0^t (1 + (\sigma + x) + (\sigma + x)^2) d\sigma} = c^* + \int_0^t h(\tau + x) e^{-\int_0^\tau (1 + (\sigma + x) + (\sigma + x)^2) d\sigma} d\tau, \quad (1.25)$$

i przejdźmy do granicy z $t \rightarrow +\infty$. Otrzymujemy:

$$c^* = - \int_0^{+\infty} h(\tau + x) e^{-\int_0^\tau (1 + (\sigma + x) + (\sigma + x)^2) d\sigma} d\tau, \quad (1.26)$$

Podstawiając wartość c^* do (1.25), dostajemy

$$y^*(t) = - \int_t^{+\infty} h(\tau + x) e^{\int_\tau^t (1 + (\sigma + x) + (\sigma + x)^2) d\sigma} d\tau. \quad (1.27)$$

Ponieważ ma miejsce nierówność $1 + (\sigma + x) + (\sigma + x)^2 \geq \frac{3}{4}$, to rozwiązanie (1.27) jest ograniczone:

$$|y^*(t)| \leq \int_t^{+\infty} |h|_0 e^{-\frac{3}{4}(\tau-t)} d\tau = \frac{4}{3} |h|_0.$$

W ten sposób układ (1.24) ma jedyną ograniczoną inwariantną rozmaitość, określoną równością:

$$y = u(x) = - \int_0^{+\infty} h(\tau + x) e^{-\int_0^\tau (1 + (\sigma + x) + (\sigma + x)^2) d\sigma} d\tau.$$

Powracając do rozpatrywania układu (1.1), w którym $y \in \mathbb{R}$, a $A(x)$ jest ciągłą skalarną funkcją zależną od zmiennych x_1, \dots, x_m (niekoniecznie ograniczoną na \mathbb{R}^m), udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1. *Załóżmy, że w układzie (1.3) ciągła skalarna funkcja $A(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^m$ spełnia jedną z nierówności*

$$A(x) \geq \alpha, \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad (1.28)$$

albo

$$A(x) \leq -\alpha, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (1.29)$$

Wówczas układ (1.3) ma jedyną ograniczoną na \mathbb{R}^m inwariantną rozmaitość (1.4) dla każdej ustalonej funkcji $h(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$.

DOWÓD. Jeżeli spełniony jest warunek (1.28), to wtedy pokażemy, że ograniczona inwariantna rozmaitość układu (1.3) zapisuje się w postaci:

$$y = u(x) = - \int_0^{+\infty} h(x(\tau; x)) e^{-\int_0^\tau A(x(\sigma, x)) d\sigma} d\tau. \quad (1.30)$$

Na początku przekonamy się, że równość (1.30) określa inwariantną rozmaitość układu (1.3). Rozpatrzmy w tym celu złożenie:

$$u(x(t; x)) = - \int_0^{+\infty} h(x(\tau + t, x)) e^{-\int_0^{\tau+t} A(x(\sigma, x)) d\sigma} d\tau = - \int_t^{+\infty} h(x(\tau; x)) e^{-\int_t^\tau A(x(\sigma, x)) d\sigma} d\tau.$$

Widać stąd, że dla funkcji $u(x(t; x))$ spełniona jest tożsamość

$$\frac{du(x(t; x))}{dt} \equiv A(x(t; x))u(x(t; x)) + h(x(t; x)),$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ i dla każdej ustalonej wartości $x \in \mathbb{R}^m$, co pokazuje, że równość (1.30) określa inwariantną rozmaitość układu (1.3).

Pokażemy teraz, że funkcja (1.30) jest ograniczona na \mathbb{R}^m . Faktycznie, na podstawie nierówności (1.28) i ograniczoności funkcji $h(x)$ mamy:

$$|u(x)| \leq \int_0^{+\infty} |h|_0 e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{|h|_0}{\alpha}.$$

W przypadku, gdy spełniona jest nierówność (1.29), ograniczona inwariantna rozmaitość układu (1.3) zapisuje się w następującej postaci:

$$y = u(x) = \int_{-\infty}^0 h(x(\tau; x)) e^{\int_{\tau}^0 A(x(\sigma, x)) d\sigma} d\tau. \quad (1.31)$$

□

PRZYKŁAD 1.10. Rozpatrzmy układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \omega_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \omega_2, \\ \frac{dy}{dt} = (-2 + 3x_1^4 x_2^2 - 5x_1^8 x_2^4)y + h(x_1, x_2), \end{cases} \quad (1.32)$$

gdzie $\omega_i = \text{const}$. Ponieważ funkcja $A(x_1, x_2) = -2 + 3x_1^4 x_2^2 - 5x_1^8 x_2^4$ spełnia nierówność: $A(x_1, x_2) < -2, 2$, to układ (1.32) ma jedną inwariantną rozmaitość dla każdej ustalonej funkcji $h(x_1, x_2) \in C^0(\mathbb{R}^2)$ i rozmaitość tę zapisuje się w postaci:

$$y = u(x) = \int_{-\infty}^0 h(\omega_1\tau + x_1, \omega_2\tau + x_2) e^{\int_{\tau}^0 (-2 + 3(\omega_1\tau + x_1)^4 (\omega_2\tau + x_2)^2 - 5(\omega_1\tau + x_1)^8 (\omega_2\tau + x_2)^4) d\sigma} d\tau.$$

Proponujemy Czytelnikowi samodzielnie zbadać własność regularności następujących układów.

1. $\frac{dx}{dt} = \omega, \omega > 0, \quad \frac{dy}{dt} = \left[A_0 + \sum_{n=1}^{2010} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \right] y.$
2. $\frac{dx}{dt} = \omega, \omega > 0, \quad \frac{dy}{dt} = \left[\sum_{n=1}^{2010} (A_n \cos^2 nx + B_n \sin^2 nx) \right] y.$
3. $\frac{dx}{dt} = \omega, \omega > 0, \quad \frac{dy}{dt} = \left[A_0 + \sum_{n=1}^{2010} (A_n \cos^3 nx + B_n \sin^3 nx) \right] y.$
4. $\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \left[\sum_{n=1}^{10} A_n (\cos nx)^n \right] y.$

$$5. \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \left[\sum_{n=1}^{10} A_n (\sin x)^{2n} \right] y.$$

$$6. \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = (2 + \cos x)^{\sin x} y.$$

$$7. \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = (3 + 2 \sin x)^{A_0 \cos x} y, \quad A_0 = \text{const.}$$

$$8. \quad \frac{dx_1}{dt} = 1, \quad \frac{dx_2}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt} = (1 + 2 \sin^2 x_1 + 3 \sin x_1 \cos x_2 + 1, 5 \cos^2 x_2) y.$$

$$9. \quad \frac{dx}{dt} = \cos x, \quad \frac{dy}{dt} = 2(-\sin x) y.$$

$$10. \quad \frac{dx_j}{dt} = \omega_j, \quad \omega_j = \text{const}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \frac{dy}{dt} = y \operatorname{tgh} \langle \lambda, x \rangle, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad \lambda_j = \text{const.}$$

11. Dowieść, że układ równań

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin 2010x, \\ \frac{dy}{dt} = y \cdot \cos 2011x, \end{cases}$$

nie ma funkcji Greena.

2. Pewne własności regularnych liniowych rozszerzeń układów dynamicznych

Powróćmy do rozważań dotyczących układów równań (1.1) i załóżmy, że układ równań

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ \frac{dy}{dt} = A(x)y, \end{cases} \quad (2.1)$$

ma funkcję Greena $G_0(\tau, x)$ dla zadania o ograniczonej inwariantnej rozmaitości

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)C(x(\tau, x)), & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(x)[C(x(\tau, x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

dla której spełniony jest warunek:

$$\|G_0(\tau, x)\| \leq Ke^{-\gamma|\tau|}, \quad K, \gamma = \text{const} > 0. \quad (2.3)$$

W przypadku, kiedy dla układu (2.1) macierz $A(x) \equiv A$ jest stała, funkcja Greena (2.2) nie zależy od zmiennej $x \in \mathbb{R}^m$ i ma następującą postać

$$G_0(\tau) = \begin{cases} Ce^{-A\tau}, & \tau \leq 0, \\ (C - I_n)e^{-A\tau}, & \tau > 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

gdzie C jest stałą macierzą rzutowania, tzn. $C^2 = C$. Funkcja Greena (2.2) może być przy tym tylko jedna i **istnieje wtedy i tylko wtedy**, gdy części rzeczywiste **wszystkich** wartości własnych λ_j macierzy A są różne od zera: $\text{Re } \lambda_j \neq 0$. Tego typu zagadnienia są obszernie omawiane w [22].

Wniosek 2.1. *Jeśli w układzie równań (2.1) macierz $A(x) \equiv A$ jest stała i jej wyznacznik jest równy zero, to funkcja Greena (2.4) nie istnieje. W przypadku zmiennej macierzy $A(x)$ możliwe jest (później pokażemy przykład), że*

$$\det A(x) \equiv 0 \quad \forall x \in R^m, \quad (2.5)$$

i przy tym układ (2.1) może być regularny.

Dokonajmy teraz w układzie równań (2.1) zamiany zmiennych

$$y = L(x)z, \quad (2.6)$$

gdzie $L(x)$ jest $n \times n$ wymiarową macierzą kwadratową, której elementami są funkcje rzeczywiste ciągłe i ograniczone na \mathbb{R}^m i przy tym złożenie $L(x(t; x_0))$ jest różniczkowalne w sposób ciągły względem zmiennej t . Zatem $L(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$. Załóżmy także, że

$$\det L(x) \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \max\{\|\dot{L}(x)\|, \|(L(x))^{-1}\|\} \leq c, \quad c = \text{const} < \infty. \quad (2.7)$$

Różniczkując obie strony (2.6) względem t , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dL(x)}{dt} \cdot z + L(x) \cdot \frac{dz}{dt} = A(x)y, \\ L(x) \cdot \frac{dz}{dt} &= A(x)L(x)z - \frac{dL(x)}{dt}z, \\ \frac{dz}{dt} &= (L(x))^{-1} \left[A(x)L(x) - \frac{dL(x)}{dt} \right] z, \end{aligned}$$

W ten sposób po zamianie zmiennych układ równań (2.1) przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ \frac{dz}{dt} = B(x)z. \end{cases} \quad (2.8)$$

gdzie macierz $B(x)$ określona jest równością:

$$B(x) = (L(x))^{-1}A(x)L(x) - (L(x))^{-1}\dot{L}(x) \quad (2.9)$$

Uwaga 2.1. Dla uproszczenia zapisu **macierz odwrotną** $(L(x))^{-1}$ będziemy odtąd oznaczać przez $L^{-1}(x)$.

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli układ (2.1) ma jedyną funkcję Greena (2.2), to również układ (2.8) ma jedyną funkcję Greena $\bar{G}_0(\tau, x)$ i funkcje te związane są tożsamością:*

$$G_0(\tau, x) \equiv L(x) \cdot \bar{G}_0(\tau, x) \cdot L^{-1}(x(\tau; x)) \quad (2.10)$$

Jeśli układ (2.1) ma nieskończenie wiele różnych funkcji Greena (2.2), to również układ (2.8) ma nieskończenie wiele różnych funkcji Greena $\bar{G}_0(\tau, x)$, przy czym pewne z tych funkcji można wybrać w postaci:

$$\bar{G}_0(\tau, x) = L^{-1}(x) \cdot G_0(\tau, x) \cdot L(x(\tau; x)).$$

DOWÓD. Na podstawie zamiany zmiennych (2.6) między odpowiednimi rozwiązaniami $y(t; x_0)$, $z(t; x_0)$ liniowych układów równań różniczkowych

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t; x_0))y, \quad \frac{dz}{dt} = B(x(t; x_0))z, \quad (2.11)$$

zachodzi zależność $y(t; x_0) \equiv L(x(t; x_0))z(t; x_0)$. Wynika stąd, że dla macierzy fundamentalnych $\Omega_\tau^t(x_0)$, $\bar{\Omega}_\tau^t(x_0)$ normowanych w punkcie $t = \tau$, odpowiednich układów (2.11), spełniona jest tożsamość:

$$\Omega_\tau^t(x_0) \equiv L(x(t; x_0)) \cdot \bar{\Omega}_\tau^t(x_0) \cdot L^{-1}(x(\tau; x_0)). \quad (2.12)$$

Założmy teraz, że układ (2.1) ma jedyną funkcję Greena (2.2). Zapiszmy tę funkcję w postaci:

$$\begin{aligned} G_0(\tau, x) &= \begin{cases} L(x) \cdot \bar{\Omega}_\tau^0(x) \cdot L^{-1}(x(\tau; x)) \cdot C(x(\tau; x)), & \tau \leq 0, \\ L(x) \cdot \bar{\Omega}_\tau^0(x) \cdot L^{-1}(x(\tau; x)) \cdot [C(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} = \\ &= L(x) \begin{cases} \bar{\Omega}_\tau^0(x) \cdot [L^{-1}(x(\tau; x)) \cdot C(x(\tau; x))], & \tau \leq 0, \\ \bar{\Omega}_\tau^0(x) [L^{-1}(x(\tau; x)) \cdot C(x(\tau; x)) - L^{-1}(x(\tau; x))], & \tau > 0, \end{cases} = \\ &= L(x) \begin{cases} \left[\bar{\Omega}_\tau^0(x) \cdot [L^{-1}(x(\tau; x)) \cdot C(x(\tau; x))L(x(\tau; x))] \right], & \tau \leq 0, \\ \left[\bar{\Omega}_\tau^0(x) [L^{-1}(x(\tau; x)) \cdot C(x(\tau; x))L(x(\tau; x)) - I_n] \right], & \tau > 0, \end{cases} L^{-1}(x(\tau; x)). \end{aligned}$$

Widać stąd, że układ (2.8) również ma jedyną funkcję Greena postaci:

$$\bar{G}_0(\tau, x) = \begin{cases} \bar{\Omega}_\tau^0(x) \cdot [L^{-1}(x(\tau; x)) \cdot C(x(\tau; x))L(x(\tau; x))], & \tau \leq 0, \\ \bar{\Omega}_\tau^0(x) [L^{-1}(x(\tau; x)) \cdot C(x(\tau; x))L(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

i między odpowiednimi funkcjami Greena zachodzi tożsamość (2.10). Na podstawie własności (2.7) dla macierzy $L(x)$ funkcja (2.13) również spełnia warunek (2.3), ale być może z inną stałą K .

Jeśli układ (2.1) ma nieskończenie wiele różnych funkcji Greena (2.2), to również układ (2.8) ma nieskończenie wiele różnych funkcji Greena. \square

Rozpatrzmy następujący przykład.

PRZYKŁAD 2.1. Rozważmy następujący układ równań różniczkowych

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x - 1 \\ \sin x + 1 & -\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Pokażemy, że układ (2.14) ma jedyną funkcję Greena, zatem jest regularny. Dokonajmy w układzie (2.14) zamiany zmiennych

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & \sin \frac{x}{2} \\ \sin \frac{x}{2} & -\cos \frac{x}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Obliczając macierz (2.9), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} B(x) &= L^{-1}(x)A(x)L(x) - L^{-1}(x)\dot{L}(x) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & \sin \frac{x}{2} \\ \sin \frac{x}{2} & -\cos \frac{x}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & \sin x - 1 \\ \sin x + 1 & -\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & \sin \frac{x}{2} \\ \sin \frac{x}{2} & -\cos \frac{x}{2} \end{pmatrix} + \\ &\quad - \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & \sin \frac{x}{2} \\ \sin \frac{x}{2} & -\cos \frac{x}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \frac{x}{2} & \cos \frac{x}{2} \\ \cos \frac{x}{2} & \sin \frac{x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

W ten sposób układ (2.14) po zamianie zmiennych przyjmuje postać:

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ -z_2 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Oczywiście otrzymany układ (2.16) ma jedyną funkcję Greena:

$$\bar{G}_0(\tau) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^\tau \end{pmatrix}, & \tau \leq 0, \\ -\begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau > 0. \end{cases}$$

Wynika stąd, że również układ (2.14) ma jedyną funkcję Greena, która ma postać:

$$\begin{aligned} G_0(\tau, x) &\equiv L(x) \cdot \bar{G}_0(\tau) \cdot L^{-1}(x(\tau; x)) = \\ &= \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & \sin \frac{x}{2} \\ \sin \frac{x}{2} & -\cos \frac{x}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \left(\tau + \frac{x}{2}\right) & \sin \left(\tau + \frac{x}{2}\right) \\ \sin \left(\tau + \frac{x}{2}\right) & -\cos \left(\tau + \frac{x}{2}\right) \end{pmatrix}, & \tau \leq 0, \\ -\begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & \sin \frac{x}{2} \\ \sin \frac{x}{2} & -\cos \frac{x}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \left(\tau + \frac{x}{2}\right) & \sin \left(\tau + \frac{x}{2}\right) \\ \sin \left(\tau + \frac{x}{2}\right) & -\cos \left(\tau + \frac{x}{2}\right) \end{pmatrix}, & \tau > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę na to, że w regularnym układzie (2.14) wyznacznik macierzy $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x - 1 \\ \sin x + 1 & -\cos x \end{pmatrix}$ jest równy zero.

Ponieważ przy zamianie zmiennej niezależnej $t \rightarrow pt$, $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$, układ (2.1) przechodzi w układ:

$$\frac{dx}{dt} = p \cdot f(x), \quad \frac{dy}{dt} = p \cdot A(x)y, \quad (2.17)$$

to z regularności układu (2.1) wynika regularność układu (2.17). Jeśli układ (2.1) ma nieskończenie wiele różnych funkcji Greena (2.2), to także układ (2.17) ma nieskończenie wiele różnych funkcji Greena dla każdej ustalonej rzeczywistej niezerowej wartości skalarnej parametru p .

Rozpatrzmy teraz następujący układ z parametrem:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = p \cdot A(x)y. \quad (2.18)$$

Wyjaśnimy zagadnienie zachowania własności regularności układu (2.18) przy zmianie parametru $p \neq 0$. Powróćmy do rozpatrzenia układu (2.14) z parametrem $p \neq 0$.

PRZYKŁAD 2.2. Zajmijmy się następującym układem równań różniczkowych

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = p \cdot \begin{pmatrix} \cos x & \sin x - 1 \\ \sin x + 1 & -\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Zbadamy własność regularności układu (2.19) przy zmianie rzeczywistego parametru $p \neq 0$.

W układzie (2.19) zrobimy zamianę zmiennych (2.15). Korzystając z poprzednich obliczeń, mamy:

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \end{pmatrix} = \left[p \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Obliczając wartości własne λ_j stałej macierzy

$$B = p \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & p-1 \\ -p+1 & -p \end{pmatrix},$$

otrzymujemy, że $\lambda_j^2 = p^2 - (p-1)^2 = 2p-1$. W taki sposób wnioskujemy, że jeśli $p > \frac{1}{2}$, to obydwa układy (2.19) i (2.20) będą regularne, a jeśli $p \leq \frac{1}{2}$, to układy te nie mają funkcji Greena.

Rozpatrzmy następujący przykład.

PRZYKŁAD 2.3. Weźmy pod uwagę następujący układ równań różniczkowych

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{y_2}{dt} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Po zamianie zmiennych, dostajemy

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Wtedy układ (2.21) przyjmuje postać:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & -1 \\ 2p+1 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Obliczając wartości własne λ_1, λ_2 dla stałej macierzy

$$B = \begin{pmatrix} -p & -1 \\ 2p+1 & -p \end{pmatrix},$$

mamy:

$$\lambda_1 = -p + \sqrt{-2p-1}, \quad \lambda_2 = -p - \sqrt{-2p-1}.$$

Widać stąd, że warunek $\operatorname{Re} \lambda_j \neq 0$ nie będzie spełniony dla $p = -1$ i $p = 0$.

Uwaga 2.2. Przykłady układów (2.19) i (2.21) pokazują, że możliwa jest sytuacja, kiedy układ (2.1) ma jedyną funkcję Greena (2.2), a układ (2.18) dla $p = -1$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = -A(x)y, \quad (2.23)$$

nie ma żadnej funkcji Greena.

W dalszym ciągu pokażemy, że ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2. *Niech układ (2.1) ma jedyną funkcję Greena (2.2). Wtedy układ*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dz}{dt} = -A^T(x)z, \quad (2.24)$$

ma również jedyną funkcję Greena $\tilde{G}_0(\tau, x)$ i funkcja ta związana jest z funkcją (2.2) równością:

$$\tilde{G}_0(\tau, x) \equiv -G_\tau^T(0, x), \quad (2.25)$$

gdzie

$$G_\tau(0, x) = \begin{cases} \Omega_0^\tau(x)C(x), & \tau > 0, \\ \Omega_0^\tau(x)[C(x) - I_n], & \tau \leq 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

DOWÓD. Ponieważ układ (2.1) ma jedyną funkcję Greena (2.2), to funkcję Greena zadania o ograniczonych rozwiązaniach dla układu liniowego $\frac{dy}{dt} = A(x(t; x))y$ zapisujemy w następującej postaci:

$$G_t(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_0^t(x)C(x)\Omega_\tau^0(x), & \tau \leq t, \\ \Omega_0^t(x)[C(x) - I_n]\Omega_\tau^0(x), & \tau > t. \end{cases}$$

Zmieniając miejscami t i τ , otrzymujemy

$$G_\tau(t, x) = \begin{cases} \Omega_0^\tau(x)C(x)\Omega_t^0(x), & t \leq \tau, \\ \Omega_0^\tau(x)[C(x) - I_n]\Omega_t^0(x), & t > \tau. \end{cases}$$

Teraz zapisaną macierz transponujemy, otrzymując:

$$G_\tau^T(t, x) = \begin{cases} [\Omega_t^0(x)]^T C^T(x) [\Omega_0^\tau(x)]^T, & t \leq \tau, \\ [\Omega_t^0(x)]^T [C^T(x) - I_n] [\Omega_0^\tau(x)]^T, & t > \tau. \end{cases} \quad (2.27)$$

Przy tym, na podstawie (2.3), dostajemy następującą nierówność

$$\|G_\tau^T(t, x)\| = \|G_\tau(t, x)\| = \|G_0(t - \tau, x(\tau; x))\| \leq K e^{-\gamma|t-\tau|}. \quad (2.28)$$

Wykorzystując tożsamość $C(x(\tau; x)) \equiv \Omega_0^\tau(x)C(x)\Omega_\tau^0(x)$, funkcja (2.27) dla $t = 0$ może być zapisana w następującej postaci:

$$\begin{aligned} G_\tau^T(0, x) &= \begin{cases} C^T(x) [\Omega_0^\tau(x)]^T, & 0 \leq \tau, \\ [C^T(x) - I_n] [\Omega_0^\tau(x)]^T, & \tau < 0, \end{cases} = \begin{cases} [\Omega_0^\tau(x)C(x)]^T, & 0 \leq \tau, \\ [\Omega_0^\tau(x)(C(x) - I_n)]^T, & \tau < 0, \end{cases} = \\ &= \begin{cases} [C(x(\tau; x))\Omega_0^\tau(x)]^T, & 0 \leq \tau, \\ \left\{ [C(x(\tau; x)) - I_n] \Omega_0^\tau(x) \right\}^T, & \tau < 0, \end{cases} = \begin{cases} [\Omega_0^\tau(x)]^T C^T(x(\tau; x)), & 0 \leq \tau, \\ [\Omega_0^\tau(x)]^T [C^T(x(\tau; x)) - I_n], & \tau < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Oznaczając $P(x) = I_n - C(x)$, z równości (2.29) otrzymujemy:

$$-G_\tau^T(0, x) = \begin{cases} [\Omega_0^\tau(x)]^T P(x(\tau, x)), & \tau < 0, \\ [\Omega_0^\tau(x)]^T [P(x(\tau, x)) - I_n], & \tau \geq 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Ponieważ macierz $[\Omega_t^\tau(x)]^T$ jest unormowaną fundamentalną macierzą rozwiązań sprzężonego układu liniowego $\frac{dz}{dt} = -A^T(x(t; x))z$, to na podstawie oszacowania (2.28) wynika, że równość (2.30) określa funkcję Greena układu (2.24). \square

Układ równań (2.24) przyjęto nazywać sprzężonym do układu (2.1) względem zmiennych normalnych $y \in \mathbb{R}^n$.

Jednym z ważnych i ciekawych zagadnień jest badanie warunków, przy których dla układu (2.1) istnieje zamiana zmiennych (2.6), która sprowadza go do układu sprzężonego (2.24). Jeśli taka zamiana zmiennych istnieje, to na podstawie równości (2.9) otrzymamy:

$$-A^T(x) = L^{-1}(x)A(x)L(x) - L^{-1}(x)\dot{L}(x),$$

a stąd wynika, że macierz $L(x)$ spełnia układ równań:

$$\frac{dL}{dt} = A(x)L + LA^T(x), \quad \frac{dx}{dt} = f(x). \quad (2.31)$$

Układ (2.31) można porównać z układem (2.1), w którym nie występuje już wektor $y \in \mathbb{R}^n$, natomiast występuje nieznaną $n \times n$ wymiarową macierz L . Układ (2.31) ma trywialną inwariantną rozmaitość $L \equiv 0$. Potrzebujemy jednak, aby układ miał nietrywialną inwariantną rozmaitość $L = L(x)$, gdzie macierz $L(x) \in C^1(\mathbb{R}^m; f)$ jest niezdegenerowana i oprócz tego spełnia warunek (2.7). Rozpatrując odpowiedni liniowy układ z parametrami:

$$\frac{dL}{dt} = A(x(t; x_0))L + LA^T(x(t; x_0)), \quad (2.32)$$

zapiszmy jego rozwiązanie ogólne:

$$L = \Omega_0^t(x_0)C(x_0)[\Omega_0^t(x_0)]^T = L(t; x_0), \quad (2.33)$$

gdzie $C(x_0)$ jest dowolną macierzą. Przy czym należy znaleźć albo dowieść istnienia takiej niezdegenerowanej macierzy $C(x_0)$, dla której spełniona byłaby tożsamość:

$$L(t; x_0) \equiv L(0; x(t; x_0)).$$

Oczywiście jeśli $A(x)$ jest macierzą zerową $A(x) \equiv 0$, to za macierz L można wybrać dowolną niezdegenerowaną stałą macierz. Załóżmy teraz, że w układzie (2.31) macierz $A(x)$ ma postać:

$$A(x) = \Phi \cdot M(x), \quad (2.34)$$

gdzie Φ jest stałą, symetryczną, niezdegenerowaną macierzą, a $M(x)$ jest pewną zmienną skośnie symetryczną macierzą $M^T(x) \equiv -M(x)$. W tym przypadku, w klasie niezdegenerowanych macierzy $L = L(x)$, która określa inwariantną rozmaitość układu (2.31), można

wybrać stałą macierz $L = \Phi$. Rzeczywiście, z jednej strony pochodna stałej macierzy równa się zero, $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, natomiast z drugiej strony mamy:

$$A(x)L + LA^T(x) = \Phi M(x)\Phi + \Phi[\Phi M(x)]^T = \Phi M(x)\Phi + \Phi[-M(x)]\Phi = 0.$$

Założmy teraz, że macierz kwadratowa $A(x)$ jest $2n_1$ wymiarowa ($n = 2n_1$ parzyste) i ma postać:

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_1(x) & B_2(x) \\ B_1(x) & -A_1^T(x) \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

gdzie $A_1(x)$ jest $n_1 \times n_1$ wymiarową macierzą kwadratową, $B_i(x)$ to macierz symetryczna. W przypadku tym nietrywialną inwariantną rozmiatość układu (2.31) można określić równością:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Rzeczywiście, mamy:

$$\begin{aligned} A(x)L + LA^T(x) &= \begin{bmatrix} A_1(x) & B_2(x) \\ B_1(x) & -A_1^T(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^T(x) & B_1(x) \\ B_2(x) & -A_1(x) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -B_2 & A_1 \\ A_1^T & B_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & -A_1 \\ -A_1^T & -B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

W ten sposób, jeśli układ (2.1) jest szczególnej postaci:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(x) & B_2(x) \\ B_1(x) & -A_1^T(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad B_i^T \equiv B_i, \quad (2.37)$$

to zamiana zmiennych: $y_1 = z_2$, $y_2 = -z_1$, sprowadza go do postaci sprzężonej:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} A_1(x) & B_2(x) \\ B_1(x) & -A_1^T(x) \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Rozpatrzmy teraz układ równań:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = L^{-1}(x)AL(x)y, \quad (2.38)$$

gdzie macierz $L(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$ spełnia warunek (2.7), natomiast A jest stałą macierzą. Wprowadzając do układu (2.38) zamianę zmiennych $z = L(x)y$, łatwo otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.3. Niech niezdegenerowana macierz $L(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$ będzie taka, że iloczyn

$$\dot{L}(x)L^{-1}(x) = \Lambda, \quad (2.39)$$

jest macierzą stałą. Wówczas układ (2.38) będzie regularny wtedy i tylko wtedy, gdy części rzeczywiste wszystkich wartości własnych sumy macierzy $B = A + \Lambda$ są różne od zera.

Wracając do układu (2.18) zwróćmy uwagę na to, że przy zamianie zmiennej niezależnej $pt \rightarrow t$ układ ten przyjmuje postać

$$\frac{dx}{dt} = \mu \cdot f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y, \quad (2.40)$$

gdzie parametr $\mu = \frac{1}{p}$. Układ (2.40) można rozpatrywać niezależnie, gdzie rzeczywisty parametr μ może przyjmować zerowe wartości:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y, \quad (2.41)$$

przy czym warunkiem **koniecznym** regularności układu (2.41) jest, aby **części rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy $A(x_0)$ były różne od zera, tzn.**

$$\operatorname{Re} \lambda_j(x_0) \neq 0, \quad (2.42)$$

dla każdej ustalonej wartości $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

Warunek (2.42) nie jest wystarczający, aby układ (2.41) miał funkcję Greena. Można to zaobserwować w następującym przykładzie:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{|x| + 1} y. \quad (2.43)$$

Oczywiście warunek (2.42) jest spełniony, bowiem

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{|x_0| + 1} \neq 0.$$

Ponieważ $x(t; x_0) \equiv x_0$, to $\Omega_\tau^t(x) = \exp \left\{ \frac{t - \tau}{|x| + 1} \right\}$ i funkcja Greena (2.2) ma następującą postać:

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} C(x) \exp \left\{ \frac{-\tau}{|x| + 1} \right\}, & \tau \leq 0, \\ [C(x) - 1] \exp \left\{ \frac{-\tau}{|x| + 1} \right\}, & \tau > 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Oczywiście dla funkcji (2.44) warunek (2.3) nie może być spełniony ze stałą $\gamma > 0$ niezależną od $x \in \mathbb{R}$. Prowadzi nas to do wniosku, że układ (2.43) nie jest regularny.

W przypadku kiedy w układzie (2.41) ciągła macierz $A(x)$ jest okresowa względem każdej zmiennej x_i , $i = \overline{1, m}$, to z warunku (2.42) będzie wynikała regularność układu (2.41).

Proponujemy Czytelnikowi samodzielnie zbadać regularność następujących układów równań różniczkowych.

1.

$$\frac{dx}{dt} = 2,$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \cos 2x - 0,5 \sin 2x + 0,5 & -0,5 \cos 2x - 1,5 \sin 2x + 1,5 \\ -0,5 \cos 2x - 1,5 \sin 2x + 1,5 & -1,5 \cos 2x + 0,5 \sin 2x + 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Wskazówka: przeprowadzić zamianę zmiennych:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \cos x & \sin x \\ 0,5 \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \frac{dx}{dt} = \mu, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$3. \frac{dx}{dt} = 2,6, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} (-1 - 2,6 \sin 2x) & (-5,2 \sin^2 x) \\ (-5,2 \cos^2 x) & (-1 + 2,6 \sin 2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Wskazówka: przeprowadzić zamianę zmiennych:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\psi = \sum_{j=1}^m k_j \omega_j = \langle k, \omega \rangle, \quad \omega_j = \text{const} \geq 0, \quad k_j \in \mathbb{Z}.$$

3. Warunki wystarczające regularności liniowych rozszerzeń układów dynamicznych

Odwołując się do rozważań związanych z układem (2.1), ustalimy na początku pewne dostateczne warunki istnienia jedynej funkcji Greena (2.2). Przypomnijmy, że przez $\langle y, z \rangle$, $y, z \in \mathbb{R}^n$ oznaczamy zwykły iloczyn skalarny w \mathbb{R}^n : $\langle y, z \rangle = \sum_{j=1}^n y_j z_j$.

Twierdzenie 3.1. *Niech dla układu równań (2.1) macierz $A(x)$ spełnia nierówność:*

$$\langle A(x)y, y \rangle \leq -\alpha \|y\|^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

gdzie stała α jest dodatnia i nie zależy od $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. Wówczas układ (2.1) jest regularny i funkcja Greena (2.2) ma postać

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x), & \tau \leq 0, \\ 0, & \tau > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

DOWÓD. Rozpatrzmy układ liniowy:

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t; x_0))y, \quad (3.3)$$

z ustalonym wektorem parametrów $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Pokażemy, że wszystkie jego rozwiązania eksponencjalnie dążą do zera dla $t \rightarrow +\infty$ i wzrastają dla $t \rightarrow -\infty$.

Dla dowolnego rozwiązania $y = y(t)$ układu (3.3) zachodzi nierówność:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|y(t)\|^2 &= \frac{d}{dt} \langle y(t), y(t) \rangle = \langle A(x(t; x_0))y(t), y(t) \rangle + \langle y(t), A(x(t; x_0))y(t) \rangle \\ &\leq -2\alpha \|y(t)\|^2. \end{aligned}$$

Dzieląc obydwie strony nierówności przez $\|y(t)\|^2$ i całkując w granicach od τ do t , $\tau \leq t$, otrzymujemy:

$$\int_{\tau}^t \frac{d\|y(t)\|^2}{\|y(t)\|^2} \leq -2\alpha(t - \tau), \quad \tau \leq t,$$

skąd dostajemy nierówność:

$$\|y(t)\| \leq \|y(\tau)\| e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad \tau \leq t. \quad (3.4)$$

Zapisując rozwiązanie układu (3.3) w postaci $y(t) = \Omega_\tau^t(x_0)\eta$ i podstawiając do nierówności (3.4), otrzymujemy:

$$\|\Omega_\tau^t(x_0)\eta\| \leq \|\eta\|e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad \tau \leq t,$$

skąd mamy:

$$\frac{\|\Omega_\tau^t(x_0)\eta\|}{\|\eta\|} \leq e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad \tau \leq t.$$

W ten sposób dla normy macierzy fundamentalnej rozwiązań $\Omega_\tau^t(x_0)$ układu (3.3) spełniona jest nierówność:

$$\|\Omega_\tau^t(x_0)\| \leq e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad \tau \leq t. \quad (3.5)$$

Wynika stąd, że dla funkcji Greena zadania o ograniczonych rozwiązaniach dla układu (3.3):

$$G_t(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(x)C(x(\tau; x)), & \tau \leq t, \\ \Omega_\tau^t(x)[C(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > t, \end{cases}$$

jedyną możliwością wyboru jest $C(x) = I_n$. Podstawiając $t = 0$ dostajemy jedyną funkcję Greena zadania o ograniczonej inwariantnej rozmiarowości układu (2.1) w postaci (3.2), co należało dowieść. \square

PRZYKŁAD 3.1. Rozpatrzmy układ równań:

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x), \quad j = \overline{1, 4}, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 2 \sin x_1 & \operatorname{tgh} x_2 \\ \operatorname{tgh} x_3 & -2 + \cos x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Pokażemy, że dla macierzy:

$$A(x) = \begin{pmatrix} -5 + 2 \sin x_1 & \operatorname{tgh} x_2 \\ \operatorname{tgh} x_3 & -2 + \cos x_4 \end{pmatrix},$$

spełniony jest warunek (3.1). Zapisując odpowiednią formę kwadratową, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \langle A(x)y, y \rangle &= (-5 + 2 \sin x_1) y_1^2 + (\operatorname{tgh} x_2 + \operatorname{tgh} x_3) y_1 y_2 + (-2 + \cos x_4) y_2^2 \leq \\ &\leq -3y_1^2 + 2|y_1||y_2| - y_2^2 \leq -(2 - \sqrt{2})(y_1^2 + y_2^2). \end{aligned}$$

W ten sposób dla układu (3.6) spełniony jest warunek (3.1), co oznacza, że układ (3.6) dla dowolnych funkcji $f_j(x) \in C_{\text{Lip}}(\mathbb{R}^4)$ ma jedyną funkcję Greena, czyli jest regularny.

Uwaga 3.1. Nierówność (3.1) można uogólnić, jeśli założymy, że istnieje n wymiarowa stała symetryczna macierz S , dla której spełniona jest nierówność:

$$\langle Sy, y \rangle \geq \varepsilon \|y\|^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \varepsilon = \text{const} > 0, \quad (3.7)$$

$$\langle SA(x)y, y \rangle \leq -\alpha \|y\|^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \alpha = \text{const} > 0, \quad (3.8)$$

przy czym układ (2.1) również ma jedyną funkcję Greena postaci (3.2).

Można się o tym przekonać, otrzymując nierówność podobną do (3.4) dla rozwiązań układu liniowego (3.3). Mamy zatem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Sy(t), y(t) \rangle &= \langle SA(x(t; x_0))y(t), y(t) \rangle + \langle Sy(t), A(x(t; x_0))y(t) \rangle \leq \\ &\leq -2\alpha \|y(t)\|^2 \leq -\frac{2\alpha}{\|S\|} \langle Sy(t), y(t) \rangle. \end{aligned}$$

Ponieważ dla nietrywialnych rozwiązań $y = y(t)$ układu (3.3) spełniony jest warunek: $\langle Sy(t), y(t) \rangle > 0$, to z ostatniej nierówności otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \langle Sy(t), y(t) \rangle &\leq \langle Sy(\tau), y(\tau) \rangle \exp \left\{ -\frac{2\alpha}{\|S\|} (t - \tau) \right\} \leq \\ &\leq \|S\| \cdot \|y(\tau)\|^2 \exp \left\{ -\frac{2\alpha}{\|S\|} (t - \tau) \right\}, \quad \tau \leq t \end{aligned}$$

Wynika stąd warunek dla wszystkich rozwiązań układu (3.3):

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{\|S\|}{\varepsilon}} \cdot \|y(\tau)\| \exp \left\{ -\frac{\alpha}{\|S\|} (t - \tau) \right\}, \quad \tau \leq t,$$

co prowadzi do oszacowania dla fundamentalnej macierzy rozwiązań:

$$\|\Omega_\tau^t(x_0)\| \leq \sqrt{\frac{\|S\|}{\varepsilon}} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{\|S\|} (t - \tau) \right\}, \quad \tau \leq t.$$

W ten sposób przy warunkach (3.7) i (3.8) układ (2.1) ma jedyną funkcję Greena i można ją zapisać w postaci (3.2).

Rozpatrzmy przykład.

PRZYKŁAD 3.2. Weźmy pod uwagę układ równań różniczkowych

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x), \quad j = \overline{1, 4}, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05 \operatorname{tgh} x_1 & -1 + 0,05 \operatorname{tgh} x_2 \\ 2 + 0,1 \cos x_3 & -3 + 0,1 \operatorname{tgh} x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Łatwo zauważyć, że macierz:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0,05 \operatorname{tgh} x_1 & -1 + 0,05 \operatorname{tgh} x_2 \\ 2 + 0,1 \cos x_3 & -3 + 0,1 \operatorname{tgh} x_4 \end{pmatrix},$$

nie spełnia warunku (3.1). Jeśli wybierzemy dodatnio określoną macierz S o postaci

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

to iloczyn $SA(x)$ będzie spełniał nierówność (3.8). Mamy bowiem:

$$\begin{aligned} SA(x) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,05 \operatorname{tgh} x_1 & -1 + 0,05 \operatorname{tgh} x_2 \\ 2 + 0,1 \cos x_3 & -3 + 0,1 \operatorname{tgh} x_4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 - 0,1 \cos x_3 + 0,1 \operatorname{tgh} x_1 & 1 + 0,1 \sin x_2 - 0,1 \operatorname{tgh} x_4 \\ 2 + 0,1 \cos x_3 - 0,05 \operatorname{tgh} x_1 & -2 - 0,05 \sin x_2 + 0,1 \operatorname{tgh} x_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zapiszmy lewą stronę nierówności (3.8) i oszacujmy ją:

$$\begin{aligned} \langle SA(x)y, y \rangle &= (-2 - 0,1 \cos x_3 + 0,1 \operatorname{tgh} x_1) y_1^2 + \\ &\quad + (3 + 0,1 \sin x_2 - 0,1 \operatorname{tgh} x_4 + 0,1 \cos x_3 - 0,05 \operatorname{tgh} x_1) y_1 y_2 + \\ &\quad + (-2 - 0,05 \sin x_2 + 0,1 \operatorname{tgh} x_4) y_2^2 \leq \\ &\leq (-2 + 0,2) y_1^2 + (3 + 0,35) |y_1| |y_2| + (-2 + 0,15) y_2^2. \end{aligned}$$

Ponieważ:

$$\det \begin{pmatrix} -1,8 & 1,675 \\ 1,675 & -1,85 \end{pmatrix} > 0,$$

to dla formy kwadratowej $\langle SA(x)y, y \rangle$ spełniona jest nierówność (3.8). W ten sposób pokazaliśmy, że układ (3.9) jest regularny.

Uwaga 3.2. Zamiast nierówności (3.8) możemy potrzebować spełnienia następującej nierówności:

$$\langle SA(x)y, y \rangle \geq \alpha \|y\|^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie $\alpha = \text{const} > 0$, dla pewnej stałej symetrycznej macierzy S , dla której zachodzi warunek dodatniej określoności (3.7). Będzie to wystarczające, aby układ (2.1) był regularny, przy czym funkcja Greena ma następującą postać:

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0, \\ -\Omega_\tau^0(x), & \tau > 0. \end{cases}$$

Powróćmy teraz do rozpatrywania układu (2.1), dla którego macierz $A(x)$ ma postać blokowo-diagonalną:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(x) & 0 \\ 0 & A_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

gdzie $y_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, $n_1 + n_2 = n$, $f(x) \in C_{\text{Lip}}(\mathbb{R}^m)$, $A_i(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$.

Na podstawie przeprowadzonych rozważań można stwierdzić prawdziwość następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.2. *Niech dla układu (3.10) istnieją dwie stałe symetryczne macierze S_1, S_2 , dla których spełnione są warunki:*

$$\langle S_1 y_1, y_1 \rangle \geq \alpha \|y_1\|^2, \quad \langle S_2 y_2, y_2 \rangle \leq -\alpha \|y_2\|^2. \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad (3.11)$$

$$\langle S_1 A_1(x) y_1, y_1 \rangle \leq -\|y_1\|^2, \quad \langle S_2 A_2(x) y_2, y_2 \rangle \leq -\|y_2\|^2, \quad (3.12)$$

Wtedy układ (3.10) jest regularny, czyli układ ten ma jedyną funkcję Greena dla zadania o ograniczonych inwariantnych rozmaiwościach:

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \Omega_\tau^0(x; A_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau \leq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_\tau^0(x; A_2) \end{pmatrix}, & \tau > 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

gdzie $\Omega_\tau^t(x_0; A_i)$, $i = 1, 2$, są normowanymi macierzami fundamentalnymi rozwiązań odpowiednich układów:

$$\frac{dy_i}{dt} = A_i(x(t; x_0)) y_i,$$

a x_0 jest m -wymiarowym wektorem parametrów.

Warunek (3.12) można zapisać w następującej postaci:

$$\langle SA(x)y, y \rangle \leq -\|y\|^2,$$

gdzie

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} A_1(x) & 0 \\ 0 & A_2(x) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że tutaj warunek (3.7) nie jest spełniony, ponieważ macierz S_2 jest ujemnie określona, a macierz S_1 dodatnio określona. Przy tym warunek (3.12) oznacza, że pochodna niezdegenerowanej znakozmiennej formy kwadratowej:

$$V = \langle Sy, y \rangle = \langle S_1 y_1, y_1 \rangle + \langle S_2 y_2, y_2 \rangle$$

względem układu (3.10) jest ujemnie określona. Rzeczywiście, mamy

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \langle S_1 \dot{y}_1, y_1 \rangle + \langle S_1 y_1, \dot{y}_1 \rangle + \langle S_2 \dot{y}_2, y_2 \rangle + \langle S_2 y_2, \dot{y}_2 \rangle = \\ &= \langle S_1 A_1(x) y_1, y_1 \rangle + \langle S_1 y_1, A_1(x) y_1 \rangle + \langle S_2 A_2(x) y_2, y_2 \rangle + \langle S_2 y_2, A_2(x) y_2 \rangle \\ &\leq -2 (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2). \end{aligned}$$

Definicja 3.1. Liniowy układ równań (3.3) dla ustalonej wartości $x_0 \in \mathbb{R}^m$ będziemy nazywać eksponencjalnie dychotomicznym na całej osi $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, jeśli przestrzeń \mathbb{R}^n można przedstawić w postaci sumy prostej dwóch podprzestrzeni E^+ i E^- , $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$, takich że dla każdego rozwiązania układu (3.3) $y = y^+(t)$ z warunkiem początkowym $y^+(0) \in E^+$ zachodzi oszacowanie:

$$\|y^+(t)\| \leq \bar{K} \|y^+(\tau)\| e^{-\gamma(t-\tau)}, \quad \tau \leq t, \quad t, \tau \in \mathbb{R}, \quad (3.14)$$

a dla każdego rozwiązania $y = y^-(t)$ z warunkiem początkowym $y^-(0) \in E^-$ spełnione jest oszacowanie:

$$\|y^-(t)\| \leq \bar{K} \|y^-(\tau)\| e^{\gamma(t-\tau)}, \quad t \leq \tau, \quad t, \tau \in \mathbb{R}, \quad (3.15)$$

przy czym stałe dodatnie \bar{K}, γ są niezależne od $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Wiadomo, że jeżeli układ liniowy (3.3) dla pewnej ustalonej wartości $x_0 \in \mathbb{R}^m$ jest eksponencjalnie dychotomiczny na \mathbb{R} , to istnieje jedyna funkcja Greena $\tilde{G}(t, \tau)$ zadania o ograniczonych rozwiązaniach i funkcja ta zapisuje się w postaci:

$$\tilde{G}(t, \tau) = \begin{cases} \Omega_0^t P \Omega_\tau^0, & \tau \leq t, \\ -\Omega_0^t [I_n - P] \Omega_\tau^0, & \tau > t, \end{cases} \quad (3.16)$$

gdzie P jest stałą macierzą rzutowania na podprzestrzeń E^+ wzdłuż E^- , przy czym $(I_n - P)$ jest macierzą rzutowania na podprzestrzeń E^- wzdłuż E^+ , natomiast $P^2 = P$, Ω_0^t jest macierzą fundamentalną rozwiązań układu (3.3), $\Omega_0^t|_{t=0} = I_n$.

Okazuje się, że przy spełnieniu warunków (3.14), (3.15) z ograniczoności macierzy $A(x)$ wynika ograniczoność na \mathbb{R} zmiennej macierzy postaci

$$\Omega_0^t P \Omega_t^0 = \tilde{C}(t), \quad (3.17)$$

a stąd już wynika zachodzenie następującego warunku dla funkcji Greena (3.16):

$$\|\tilde{G}(t, \tau)\| \leq \tilde{K} e^{-\gamma|t-\tau|}, \quad (3.18)$$

gdzie stała dodatnia γ jest taka sama, jak w warunkach (3.14), (3.15), a stała \tilde{K} może różnić się od stałej \bar{K} . Funkcję Greena (3.16) przy użyciu macierzy (3.17) można zapisać w postaci:

$$\tilde{G}(t, \tau) = \begin{cases} \Omega_\tau^t C(\tau), & \tau \leq t, \\ -\Omega_\tau^t [I_n - C(\tau)], & \tau > t. \end{cases} \quad (3.19)$$

Jeśli w układzie (3.3) będziemy zmieniać parametr $x_0 \in \mathbb{R}^m$, to może się zmieniać własność dychotomiczności tego układu.

Twierdzenie 3.3. *Niech układ (3.3) będzie eksponencjalnie dychotomiczny na \mathbb{R} dla każdej ustalonej wartości wektora parametrów $x_0 \in \mathbb{R}^m$ i niech stałe dodatnie \bar{K} , γ , \tilde{K} z oszacowań (3.14), (3.15), (3.18) będą niezależne od $x_0 \in \mathbb{R}^m$, wówczas funkcja Greena (3.19) w sposób ciągły zależy od parametru x_0 .*

DOWÓD. Zapiszmy funkcję Greena (3.19) w postaci:

$$\bar{G}(t, \tau, x_0) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(x_0) \bar{C}(\tau, x_0), & \tau \leq t, \\ -\Omega_\tau^t(x_0) [I_n - \bar{C}(\tau, x_0)], & \tau > t, \end{cases} \quad (3.20)$$

i dla niej zapiszmy warunek:

$$\|\bar{G}(t, \tau, x_0)\| \leq \tilde{K} e^{-\gamma|t-\tau|}. \quad (3.21)$$

Rozpatrzmy różnicę:

$$\bar{G}(t, \tau, x_0) - \bar{G}(t, \tau, \tilde{x}_0) = \Delta(t, \tau, x_0, \tilde{x}_0). \quad (3.22)$$

Różniczkując tę różnicę względem zmiennej t , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta(t, \tau, x_0, \tilde{x}_0)}{dt} &= A(x(t; x_0)) \bar{G}(t, \tau, x_0) - A(x(t; \tilde{x}_0)) \bar{G}(t, \tau, \tilde{x}_0) = \\ &= A(x(t; x_0)) [\bar{G}(t, \tau, x_0) - \bar{G}(t, \tau, \tilde{x}_0)] + \\ &\quad + [A(x(t; x_0)) - A(x(t; \tilde{x}_0))] \bar{G}(t, \tau, \tilde{x}_0) = \\ &= A(x(t; x_0)) \cdot \Delta(t, \tau, x_0, \tilde{x}_0) + F(t, \tau, x_0, \tilde{x}_0). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ponieważ układ (3.3) jest eksponencjalnie dychotomiczny na \mathbb{R} , to układ niejednorodny

$$\frac{d\Delta}{dt} = A(x(t; x_0))\Delta + F(t),$$

ma jedyne ograniczone na \mathbb{R} rozwiązanie dla każdej ustalonej funkcji $F(t)$ określonej na \mathbb{R} :

$$\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(t, \sigma, x_0) F(\sigma) d\sigma.$$

W ten sposób z równości (3.23) otrzymujemy:

$$\Delta(t, \tau, x_0, \tilde{x}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(t, \sigma, x_0) \cdot [A(x(\sigma; x_0)) - A(x(\sigma; \tilde{x}_0))] \cdot \bar{G}(\sigma, \tau, \tilde{x}_0) d\sigma. \quad (3.24)$$

Korzystając z (3.21) i z równości (3.24), mamy:

$$\begin{aligned} \|\Delta(t, \tau, x_0, \tilde{x}_0)\| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|\bar{G}(t, \sigma, x_0)\| \cdot \|A(x(\sigma; x_0)) - A(x(\sigma; \tilde{x}_0))\| \cdot \|\bar{G}(\sigma, \tau, \tilde{x}_0)\| d\sigma \leq \\ &\leq \tilde{K}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|A(x(\sigma; x_0)) - A(x(\sigma; \tilde{x}_0))\| \cdot e^{-\gamma|t-\sigma|-\gamma|\sigma-\tau|} d\sigma. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Oznaczmy teraz

$$\bar{\Delta}(t, \tau, x_0, \tilde{x}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \|A(x(\sigma; x_0)) - A(x(\sigma; \tilde{x}_0))\| \cdot e^{-\gamma|t-\sigma|-\gamma|\sigma-\tau|} d\sigma. \quad (3.26)$$

Ponieważ funkcję podcałkową z prawej strony równości (3.26) można oszacować w następujący sposób:

$$\|A(x(\sigma; x_0)) - A(x(\sigma; \tilde{x}_0))\| \cdot e^{-\gamma|t-\sigma|-\gamma|\sigma-\tau|} \leq 2\|A\|_0 \exp\left\{\frac{\gamma}{2}(|t| - |t - \tau|) - \frac{\gamma}{2}|\sigma|\right\},$$

to funkcja (3.26) jest ciągła względem zmiennych $t, \tau, x_0, \tilde{x}_0$ i dla $\tilde{x}_0 = x_0$ przyjmuje wartość zero. Z nierówności (3.25) wynika $\lim_{x_0 \rightarrow \tilde{x}_0} \Delta(t, \tau, x_0, \tilde{x}_0) = 0$. Na podstawie (3.22) funkcja Greena (3.20) jest ciągła względem parametru $x_0 \in \mathbb{R}^m$, co kończy dowód twierdzenia 3.3. □

Z jedyności funkcji Greena (3.20) i następującej własności układu (3.3):

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t; x(z; x_0)))y \equiv A(x(t + z; x_0))y,$$

wynika następująca własność funkcji macierzowej $\bar{C}(\tau, x_0)$:

$$\bar{C}(\tau, x_0) \equiv \bar{C}(0, x(\tau; x_0)) \equiv \Omega_0^\tau(x_0) \bar{C}(0, x_0) \Omega_\tau^0(x_0).$$

Oznaczając $C(x) = \bar{C}(0, x)$ z funkcji (3.20) dla $t = 0$, otrzymujemy funkcję Greena zadania o ograniczonych inwariantnych rozmaitościach (2.2) układu (2.1).

W ten sposób dochodzimy do następującego wniosku.

Wniosek 3.1. *Jeśli układ liniowy (3.3) dla każdej ustalonej wartości parametru $x_0 \in \mathbb{R}^m$ jest eksponencjalnie dychotomiczny na \mathbb{R} i w nierównościach (3.14), (3.15) dla rozwiązań tego układu występują dodatnie stałe \bar{K}, γ niezależne od $x_0 \in \mathbb{R}^m$, to układ (2.1) ma jedyną funkcję Greena (2.2).*

Proponujemy samodzielnie zbadać regularność następujących układów.

1.

$$\frac{dx}{dt} = \sin x, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2 \sin x & 0 \\ 2010 \sin 2x & -2 + \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\frac{dx}{dt} = \cos x, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2 \sin x & \frac{2010 \cos x}{1+x+x^2} \\ 0 & 5 + 4 \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^5,$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \operatorname{tgh} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 \sin x_3 & 3 + 2 \operatorname{tgh} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2011 & 2 + \sin x_4 & 0 \\ 2010 & 2012 & 0 & 3 + \cos x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

4. Funkcje Lapunowa w teorii liniowych rozszerzeń układów dynamicznych

W tym rozdziale powrócimy do rozpatrywania układu (1.1) i zastosujemy funkcje Lapunowa do badania problemu jego regularności, czyli problemu istnienia jedynej funkcji Greena (1.6) z warunkiem (1.7).

Następujące twierdzenie podaje warunki wystarczające regularności.

Twierdzenie 4.1. *Załóżmy, że istnieje $n \times n$ wymiarowa symetryczna macierz $S(x) \in C^1(\mathbb{R}^m; f)$ (ograniczona na \mathbb{R}^m i superpozycja $S(x(t; x_0))$) jest w sposób ciągły różniczkowalna względem t). Ponadto zakładamy, że spełniona jest nierówność:*

$$\langle [\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x)] y, y \rangle \leq -\|y\|^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

oraz

$$\det S(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m. \quad (4.2)$$

Wtedy układ (1.1) ma jedyną funkcję Greena (1.6), która spełnia warunek (1.7) z dodatkowymi stałymi K, γ . Stałe te można przy tym wybrać w postaci:

$$K = (2 + \sqrt{2})(\|A\|_0 \|S\|_0)^{3/2}, \quad \gamma = (2\|S\|_0)^{-1}, \quad (4.3)$$

gdzie $\|A\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \|A(x)\|$.

DOWÓD.

Na początku udowodnimy, że z warunków (4.1), (4.2) wynika eksponencjalna dychotomiczność układu (3.3) dla każdej ustalonej wartości parametrów $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Dla uproszczenia zapisu oznaczymy: $A(t) = A(x(t; x_0))$, $S(t) = S(x(t; x_0))$. Warunek (4.1) oznacza, że pochodna formy kwadratowej:

$$V(t, y) = \langle S(t)y, y \rangle, \quad (4.4)$$

względem układu liniowego:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad (4.5)$$

jest ujemnie określona, ponieważ mamy

$$\dot{V}(t, y) = \langle [\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t)] y, y \rangle \leq -\|y\|^2. \quad (4.6)$$

Założmy, że niezdegenerowana macierz $S(t)$ ma r dodatnich wartości własnych ($1 \leq r \leq n-1$) i $n-r$ ujemnych wartości własnych. Oznaczmy:

$$M_t^+ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle S(t)\Omega_0^t y, \Omega_0^t y \rangle \geq 0\}, \quad (4.7)$$

$$M_t^- = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle S(t)\Omega_0^t y, \Omega_0^t y \rangle \leq 0\}. \quad (4.8)$$

Pokażemy, że dla dowolnych wartości $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$ zachodzą inkluzje:

$$M_{t_2}^+ \subset M_{t_1}^+, \quad M_{t_1}^- \subset M_{t_2}^-. \quad (4.9)$$

W tym celu nierówność (4.6) zapiszemy w następującej postaci:

$$\frac{d}{dt} \langle S(t)\Omega_0^t y, \Omega_0^t y \rangle \leq -\|\Omega_0^t y\|^2 \quad (4.10)$$

Całkując obustronnie nierówność (4.10) w granicach od t_1 do t_2 ($t_1 < t_2$), otrzymujemy:

$$\langle S(t_2)\Omega_0^{t_2} y, \Omega_0^{t_2} y \rangle - \langle S(t_1)\Omega_0^{t_1} y, \Omega_0^{t_1} y \rangle \leq -\int_{t_1}^{t_2} \|\Omega_0^t y\|^2 dt < 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0 \quad (4.11)$$

W ten sposób, jeżeli punkt $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \neq 0$, należy do zbioru $M_{t_2}^+$, czyli zachodzi nierówność:

$$\langle S(t_2)\Omega_0^{t_2} y_0, \Omega_0^{t_2} y_0 \rangle \geq 0,$$

to z nierówności (4.11) wynika, że $\langle S(t_1)\Omega_0^{t_1} y_0, \Omega_0^{t_1} y_0 \rangle > 0$, czyli $y_0 \in M_{t_1}^+$.

Jeżeli punkt $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \neq 0$, należy do zbioru $M_{t_1}^-$, czyli zachodzi nierówność:

$$\langle S(t_1)\Omega_0^{t_1} y_0, \Omega_0^{t_1} y_0 \rangle \leq 0,$$

to z nierówności (4.11) wynika, że $\langle S(t_2)\Omega_0^{t_2} y_0, \Omega_0^{t_2} y_0 \rangle < 0$, czyli $y_0 \in M_{t_2}^-$.

Pokażemy teraz, że zbiór

$$M^+ = \bigcap_{t=0}^{+\infty} M_t^+ \quad (4.12)$$

stanowi r wymiarową podprzestrzeń z \mathbb{R}^n . W tym celu przekształćmy formę kwadratową

$$\langle S(0)y, y \rangle$$

poprzez ortogonalną zamianę zmiennych

$$y = Qz, \quad Q^{-1} = Q^T, \quad (4.13)$$

doprowadzając ją do postaci kanonicznej:

$$\langle Q^T S(0) Qz, z \rangle = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 - \lambda_{r+1} z_{r+1}^2 - \dots - \lambda_n z_n^2, \quad \lambda_j > 0, j = \overline{1, n}, \quad (4.14)$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_r, -\lambda_{r+1}, \dots, -\lambda_n$ są wartościami własnymi symetrycznej macierzy $S(0)$.

Ustalmy niezerowy r wymiarowy wektor

$$c = (c_1, \dots, c_r) \quad (4.15)$$

i rozpatrzmy w przestrzeni zmiennych z_{r+1}, \dots, z_n domkniętą kulę, określoną nierównością:

$$\lambda_{r+1}z_{r+1}^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 \leq \lambda_1 c_1^2 + \dots + \lambda_r c_r^2. \quad (4.16)$$

Nierówność (4.15) można zapisać w postaci następującego układu:

$$\begin{cases} \langle Q^T S(0)Qz, z \rangle \geq 0, \\ (I_r, 0)z = c. \end{cases} \quad (4.17)$$

Wracając do zmiennych y zgodnie ze wzorem (4.13), można stwierdzić, że układ:

$$\begin{cases} \langle S(0)y, y \rangle \geq 0, \\ (I_r, 0)Q^T y = c. \end{cases} \quad (4.18)$$

wyznacza zamkniętą kulę K_0 z $(n - r)$ wymiarowej hiperpłaszczyzny:

$$(I_r, 0)Q^T y = c. \quad (4.19)$$

Teraz dla każdej ustalonej wartości $t > 0$ rozpatrzmy zbiór K_t tych wartości $y \in \mathbb{R}^n$, dla których jednocześnie zachodzą warunki:

$$\begin{cases} \langle S(t)\Omega_0^t y, \Omega_0^t y \rangle \geq 0, \\ (I_r, 0)Q^T y = c. \end{cases} \quad (4.20)$$

Ustalona ortogonalna macierz Q jest stała i taka sama jak w (4.13) i (4.17). Pokażemy, że zbiory K_t dla każdej ustalonej wartości $t > 0$ są domkniętymi kulami z $(n - r)$ wymiarowej hiperpłaszczyzny (4.19). Ustalmy pewną wartość $t = t_0 > 0$. Pokażemy, że istnieją niezerowe wartości $z = \tilde{z} \in \mathbb{R}^n$, dla których zachodzą warunki:

$$\begin{cases} \langle \tilde{S}(t_0)z, z \rangle > 0, \\ (I_r, 0)z = c, \end{cases} \quad (4.21)$$

gdzie

$$\tilde{S}(t_0) = Q^T [\Omega_0^{t_0}]^T S(t_0) \Omega_0^{t_0} Q. \quad (4.22)$$

Formę kwadratową

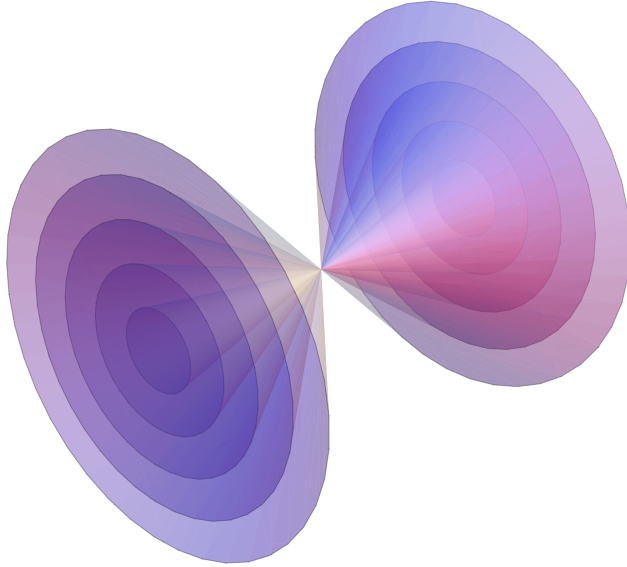
$$\langle \tilde{S}(t_0)z, z \rangle,$$

poprzez ortogonalną zamianę zmiennych

$$z = \Theta(t_0)u, \quad (4.23)$$

doprowadźmy do postaci kanonicznej:

$$\langle \Theta^T(t_0)\tilde{S}(t_0)\Theta(t_0)u, u \rangle = \lambda_1(t_0)u_1^2 + \dots + \lambda_r(t_0)u_r^2 - \lambda_{r+1}(t_0)u_{r+1}^2 - \dots - \lambda_n(t_0)u_n^2, \quad (4.24)$$



Rys. 4.1. Stożki określone przez nierówność (4.25).

i rozpatrzmy nierówność:

$$\lambda_1(t_0)u_1^2 + \dots + \lambda_r(t_0)u_r^2 - \lambda_{r+1}(t_0)u_{r+1}^2 - \dots - \lambda_n(t_0)u_n^2 \geq 0. \quad (4.25)$$

Jeśli pewien wektor $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)$ spełnia nierówność (4.25), to także i wektor $(p\bar{u}_1, p\bar{u}_2, \dots, p\bar{u}_n)$ dla dowolnej wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ spełnia nierówność (4.25). Wynika stąd, że w przestrzeni zmiennych u_1, \dots, u_n nierówność (4.25) wyznacza stożek. Oznaczmy go przez $K(t_0)$. Stożek ten zawiera r wymiarowe podprzestrzenie z \mathbb{R}^n . Baza jednej z takich podprzestrzeni ma postać:

$$e = [e_1, \dots, e_r] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bazy innych podprzestrzeni, które należą do stożka $K(t_0)$, można otrzymać przez niewielką zmianę ostatnich $n - r$ współrzędnych. Przykładowo można wybrać inną podprzestrzeń z bazą postaci

$$\bar{e} = [\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \end{bmatrix},$$

gdzie ε jest niezerową liczbą, wybraną z przedziału otwartego: $(0, \varepsilon_0)$, gdzie $\varepsilon_0 = \min_j \sqrt{\frac{\lambda_j(t_0)}{\lambda_n(t_0)}} > 0$.

Powracając od zmiennych $u \in \mathbb{R}^n$ do zmiennych $z \in \mathbb{R}^n$ (wzór (4.23)) możemy stwierdzić, że zbiór

$$\bar{K}(t_0) = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle \tilde{S}(t_0)z, z \rangle \geq 0\}$$

zawiera w sobie r wymiarowe liniowe podprzestrzenie E^r . Baza jednej z takich podprzestrzeni ma postać:

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_r] = \Theta(t_0)e = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}.$$

Tutaj V_1 oznacza kwadratową r wymiarową macierz. Z zawierania się zbiorów $M_{t_0}^+ \subset M_0^+$ wynika inkluzja $\bar{K}(t_0) \subset \bar{K}(0)$, a stąd

$$E^r \subset \bar{K}(0). \quad (4.26)$$

Na tej podstawie można stwierdzić, że

$$\det V_1 \neq 0. \quad (4.27)$$

Jeśli macierz V_1 byłaby zdegenerowana, to kolumny $\{v_i^{(1)}\}_{i=1}^r$ tej macierzy byłyby liniowo zależne, czyli:

$$\sum_{i=1}^r b_i v_i^{(1)} = 0, \quad \sum_{i=1}^r b_i^2 \neq 0.$$

Stąd wynika, że pierwsze r współrzędnych następującego wektora:

$$\tilde{z} = \sum_{i=1}^r b_i v_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{z} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

są zerowe. Podstawiając wektor (4.28) do (4.14), otrzymujemy:

$$\langle Q^T S(0)Q\tilde{z}, \tilde{z} \rangle = -\lambda_{r+1}\tilde{z}_{r+1}^2 - \dots - \lambda_n\tilde{z}_n^2 < 0,$$

co oznacza, że wektor (4.28) nie należy do zbioru $\bar{K}(0)$, co sprzeczne jest z (4.26).

Znajdziemy wspólny wektor \tilde{z} , który należy do podprzestrzeni E^r i hiperpłaszczyzny

$$(I_r, 0)z = c. \quad (4.29)$$

Wektor ten szukamy jako kombinację liniową:

$$\tilde{z} = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i = V \cdot \alpha, \quad (4.30)$$

gdzie $\alpha = \text{colon} \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ jest nieznanym wektorem. Podstawiając (4.30) do (4.29), otrzymujemy:

$$(I_r, 0)V\alpha = c.$$

Stąd jednoznacznie znajdujemy wektor α :

$$\alpha = V_1^{-1}c.$$

W ten sposób wektor (4.30) spełnia układ (4.17). Wynika stąd, że zbiór K_t , określony układem (4.20), dla każdej wartości $t = t_0 \geq 0$ jest niepusty.

Pokażemy, że K_{t_0} jest kulą domkniętą, znajdującą się na $(n - r)$ wymiarowej hiperpłaszczyźnie (4.19). Na podstawie nierówności (4.11) dla $t_2 = t_0$, $t_1 = 0$, wykorzystując (4.14) i oznaczenie (4.22), zapiszmy nierówność:

$$\langle \tilde{S}(t_0)z, z \rangle \leq \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 - \lambda_{r+1} z_{r+1}^2 - \dots - \lambda_n z_n^2. \quad (4.31)$$

Stąd wynika ujemna określoność $(n - r)$ wymiarowego bloku $\tilde{S}_{22}(t_0)$ macierzy:

$$\tilde{S}(t_0) = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{11}(t_0) & \tilde{S}_{12}(t_0) \\ \tilde{S}_{21}(t_0) & \tilde{S}_{22}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Niech zamiana zmiennych:

$$z^{(2)} = T(t_0)v^{(2)},$$

gdzie $z^{(2)} = (z_{r+1}, \dots, z_n)$, $v^{(2)} = (v_{r+1}, \dots, v_n)$, sprowadza formę kwadratową $\langle \tilde{S}_{22}(t_0)z^{(2)}, z^{(2)} \rangle$ do postaci kanonicznej:

$$\langle \tilde{S}_{22}(t_0)T(t_0)v^{(2)}, T(t_0)v^{(2)} \rangle = -\tilde{\lambda}_{r+1}v_{r+1}^2 - \dots - \tilde{\lambda}_n v_n^2 = \langle \tilde{\Lambda}v^{(2)}, v^{(2)} \rangle.$$

Wówczas dokonując w nierówności:

$$\langle \tilde{S}(t_0)z, z \rangle \geq 0,$$

zamiany zmiennych:

$$y = \text{diag} \{I_r, T(t_0)\} v, \quad v = (v^{(1)}, v^{(2)}),$$

i podstawiając stałą wartość $v^{(1)} = c$, otrzymujemy:

$$\langle \tilde{S}_{11}(t_0)c, c \rangle + \langle \tilde{S}_{12}(t_0)T(t_0)v^{(2)}, c \rangle + \langle \tilde{S}_{21}(t_0)c, T(t_0)v^{(2)} \rangle + \langle \tilde{\Lambda}v^{(2)}, v^{(2)} \rangle \geq 0. \quad (4.32)$$

Wydzielając odpowiednie wyrażenia kwadratowe, nierówność (4.32) zapiszemy w postaci:

$$\tilde{\lambda}_{r+1}(v_{r+1} - \beta_1)^2 + \dots + \tilde{\lambda}_n(v_n - \beta_{n-r})^2 \leq f(c). \quad (4.33)$$

Z tego, że zbiór K_{t_0} zawiera przynajmniej dwa niezerowe wektory, wynika nierówność

$$f(c) > 0. \quad (4.34)$$

Z nierówności (4.33) widać, że K_{t_0} jest kulą domkniętą (elipsoidą). W ten sposób wnioskujemy, że do przekroju $\bigcap_{t=0}^{+\infty} K_t$ zawartego w M^+ ($\bigcap_{t=0}^{+\infty} K_t \subset M^+$) należą niezerowe wektory $\bar{y}(c)$. Zmieniając r wymiarowy wektor $c = (c_1, \dots, c_r)$, otrzymujemy r liniowo niezależnych wektorów, które należą do zbioru $M^+ = \bigcap_{t=0}^{+\infty} M_t^+$. Oznaczmy te wektory przez $y_{(1)}^+, y_{(2)}^+, \dots, y_{(r)}^+$. Pokażemy, że odpowiednie rozwiązania układu (4.5)

$$y^+(t) = \Omega_0^t y_{(i)}^+, \quad (4.35)$$

spełniają warunek (3.14). Ponieważ $y_{(i)}^+ \in M^+$, to dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ ma miejsce nierówność:

$$\langle S(t)\Omega_0^t y_{(i)}^+, \Omega_0^t y_{(i)}^+ \rangle > 0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (4.36)$$

Oznaczmy

$$V_{\pm\varepsilon}(t, y) = \langle S(t)y, y \rangle \pm \varepsilon \|y\|^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.37)$$

Na podstawie ograniczoności macierzy $A(t)$ na całej osi $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, pochodna względem układu (4.5) zaburzonej formy kwadratowej (4.37) dla dostatecznie małych ustalonych wartościach $\varepsilon > 0$ również będzie ujemnie określona. Mamy bowiem:

$$\dot{V}_{\pm\varepsilon}(t, y) \leq -\|y\|^2 \pm 2\varepsilon \langle A(t)y, y \rangle \leq -(1 - 2\|A\|_0\varepsilon)\|y\|^2. \quad (4.38)$$

Widać stąd, że stałą ε wystarczy wybrać w granicach $0 \leq \varepsilon < \frac{\beta}{2\|A\|_0}$.

Oszacujmy z góry zaburzoną formę kwadratową (4.37):

$$V_\varepsilon(t, y) \leq (\|S\|_0 + \varepsilon)\|y\|^2. \quad (4.39)$$

Z nierówności (4.38), korzystając z (4.39), otrzymujemy oszacowanie:

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t, y(t)) \leq -(1 - 2\|A\|_0\varepsilon)\|y(t)\|^2 \leq -\frac{1 - 2\|A\|_0\varepsilon}{\|S\|_0 + \varepsilon} V_\varepsilon(t, y(t)), \quad (4.40)$$

dla dowolnego rozwiązania $y = y(t)$ układu (4.5). Teraz podstawiając do (4.40) rozwiązania układu (4.5) w postaci (4.35), dla których spełniona jest nierówność (4.36), dostajemy

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(t, y^+(t)) \leq -\gamma_1 \cdot V_\varepsilon(t, y^+(t)), \quad (4.41)$$

gdzie

$$\gamma_1 = \frac{1 - 2\|A\|_0\varepsilon}{\|S\|_0 + \varepsilon} > 0. \quad (4.42)$$

Ponieważ nierówność (4.36), to $V_\varepsilon(t, y^+(t)) > 0$ zachodzi dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$, to możemy podzielić obydwie strony nierówności (4.41) przez $V_\varepsilon(t, y^+(t)) > 0$. Całkując w granicach od τ do t , $\tau \leq t$, mamy:

$$V_\varepsilon(t, y^+(t)) \leq V_\varepsilon(\tau, y^+(\tau)) \cdot e^{-\gamma_1(t-\tau)}, \quad \tau \leq t. \quad (4.43)$$

Korzystając z postaci funkcji (4.37) i oszacowania (4.43), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \|y^+(t)\| &= \left(\frac{V_\varepsilon(t, y^+(t)) - V_0(t, y^+(t))}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{V_\varepsilon(t, y^+(t))}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\frac{V_\varepsilon(\tau, y^+(\tau))}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{\gamma_1}{2}(t - \tau) \right\}. \end{aligned}$$

Na podstawie oszacowania (4.40) z ostatniej nierówności otrzymujemy

$$\|y^+(t)\| \leq \left(\frac{\|S\|_0 + \varepsilon}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \|y^+(\tau)\| \exp\left\{ -\frac{\gamma_1}{2}(t - \tau) \right\}, \quad \tau \leq t. \quad (4.44)$$

W ten sposób dla wszystkich rozwiązań (4.35) układu (4.5), spełniających nierówność (4.36), zachodzi oszacowanie (4.44), takie samo jak oszacowanie (3.14) ze stałymi:

$$\bar{K} = \left(\frac{\|S\|_0 + \varepsilon}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1}{2} = \frac{1 - 2\|A\|_0\varepsilon}{2(\|S\|_0 + \varepsilon)}. \quad (4.45)$$

Założmy teraz, że pewien wektor $y^* \in \mathbb{R}^n$ nie należy do zbioru M^+ . Wówczas istnieje taka wartość $t = t^* \in \mathbb{R}$, dla której $y^* \notin M_{t^*}^+$. Z (4.12) wynika, że $y^* \notin M_t^+$ dla wszystkich $t \geq t^*$. Oznacza to, że spełniona jest nierówność

$$V_0(t, y^*(t)) = \langle S(t)y^*(t), y^*(t) \rangle < 0 \quad \forall t \in [t^*, +\infty),$$

gdzie $y^*(t) = \Omega_0^t y^*$ jest rozwiązaniem układu (4.5). Zapiszmy nierówność (4.10) w następującej postaci:

$$\frac{d}{dt} [-V_0(t, y^*(t))] \geq \|y^*(t)\|^2. \quad (4.46)$$

Ponieważ ma miejsce nierówność

$$-V_0(t, y) = -\langle S(t)y, y \rangle \leq \|S\|_0 \|y\|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad (4.47)$$

to z oszacowania (4.46) wynika, że

$$\frac{d}{dt} [-V_0(t, y^*(t))] \geq \frac{1}{\|S\|_0} [-V_0(t, y^*(t))]. \quad (4.48)$$

Rozpatrzmy teraz nierówność (4.48) dla $t \in [t^*, +\infty)$. Funkcja $[-V_0(t, y^*(t))]$ przyjmuje tylko dodatnie wartości. Dzieliąc obydwie strony nierówności (4.48) przez tę funkcję i całkując w granicach od t^* do t ($t^* < t$), otrzymujemy

$$-V_0(t, y^*(t)) \geq [-V_0(t^*, y^*(t^*))] \exp\left\{ \frac{1}{\|S\|_0}(t - t^*) \right\}.$$

Korzystając z oszacowania (4.47), z ostatniej nierówności dostajemy

$$\|S\|_0 \|y^*(t)\|^2 \geq [-V_0(t^*, y^*(t^*))] \exp\left\{ \frac{1}{\|S\|_0}(t - t^*) \right\},$$

a stąd

$$\|y^*(t)\| \geq \left(\frac{-V_0(t^*, y^*(t^*))}{\|S\|_0} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ \frac{1}{2\|S\|_0}(t - t^*) \right\}. \quad (4.49)$$

Otrzymane oszacowanie (4.49) pokazuje, że każde rozwiązanie $y = y^*(t)$ układu (4.5) przy warunku początkowym $y^*(t)|_{t=0} \notin M^+$ musi wzrastać na $+\infty$.

W ten sposób wnioskujemy, że dowolna kombinacja liniowa wektorów $y_{(i)}^+ \in M^+$ również należy do M^+ , ponieważ kombinacja liniowa odpowiednich rozwiązań $\Omega_0^t y_{(i)}^+$ układu (4.5) dąży do zera na $+\infty$.

Pokażemy, że M^+ jest r wymiarową przestrzenią. W tym celu wystarczy pokazać, że nie istnieje wektor $\tilde{y} \in M^+$, którego nie można byłoby zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów $y_{(i)}^+ \in M^+$, $i = \overline{1, r}$. Niech taki wektor $\tilde{y} \in M^+$ istnieje. Wówczas pewna kombinacja liniowa $\sum_{i=1}^r c_i y_{(i)}^+ + c_{r+1} \tilde{y} = \bar{y}$ nie należy do zbioru M_0^+ , ponieważ zbiór M_0^+ nie może zawierać $(r+1)$ wymiarowych podprzestrzeni. Z inkluzji $M^+ \subset M_0^+$ wynika, że $\bar{y} \notin M^+$. W ten sposób zbiór M^+ jest r wymiarową podprzestrzenią z \mathbb{R}^n . Zmieńmy oznaczenie M^+ na E^+ .

Aby otrzymać lepsze oszacowanie niż (4.44), możemy zauważyć, że dla każdego niezerowego wektora $y^+ \in E^+$ odpowiednie rozwiązanie $y^+(t) = \Omega_0^t y^+$ układu (4.5) spełnia nierówność:

$$V_{-\varepsilon}(t, y^+(t)) = \langle S(t)y^+(t), y^+(t) \rangle - \varepsilon \|y^+(t)\|^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.50)$$

dla każdej ustalonej wartości ε , wybranej z przedziału:

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2\|A\|_0}. \quad (4.51)$$

Faktycznie, założmy, że istnieje taka wartość $t = t^*$, dla której nierówność (4.50) nie jest spełniona, tzn.

$$V_{-\varepsilon}(t, y^+(t^*)) \leq 0. \quad (4.52)$$

Wówczas na podstawie nierówności (4.38) mamy

$$\frac{d}{dt} V_{-\varepsilon}(t, y^+(t)) \leq -(1 - 2\|A\|_0 \varepsilon) \|y^+(t)\|^2. \quad (4.53)$$

Z nierówności (4.51)–(4.53) wynika, że

$$V_{-\varepsilon}(t, y^+(t)) < 0 \quad \forall t \in (t^*, +\infty). \quad (4.54)$$

Mnożąc obydwie strony nierówności (4.53) przez -1 , otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} [-V_{-\varepsilon}(t, y^+(t))] \geq (1 - 2\|A\|_0 \varepsilon) \|y^+(t)\|^2.$$

Stąd i z oszacowania

$$-V_{-\varepsilon}(t, y) = -\langle S(t)y, y \rangle + \varepsilon \|y\|^2 \leq (\|S\|_0 + \varepsilon) \|y\|^2, \quad (4.55)$$

otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt} [-V_{-\varepsilon}(t, y^+(t))] \geq \frac{1 - 2\|A\|_0 \varepsilon}{\|S\|_0 + \varepsilon} [-V_{-\varepsilon}(t, y^+(t))]. \quad (4.56)$$

Rozpatrując nierówność (4.56) tylko dla $t \in (t^*, +\infty)$, podzielmy obydwie strony przez dodatnią funkcję $[-V_{-\varepsilon}(t, y^+(t))]$ i przekałujmy obustronnie w granicach od t_1 ($t_1 > t^*$) do t ($t_1 \leq t$). Otrzymujemy wtedy, że

$$\ln \left| \frac{-V_{-\varepsilon}(t, y^+(t))}{-V_{-\varepsilon}(t_1, y^+(t_1))} \right| \geq \frac{1 - 2\|A\|_0 \varepsilon}{\|S\|_0 + \varepsilon} \cdot (t - t_1),$$

a stąd

$$-V_{-\varepsilon}(t, y^+(t)) \geq -V_{-\varepsilon}(t_1, y^+(t_1)) \exp \left\{ \frac{1 - 2\|A\|_0 \varepsilon}{\|S\|_0 + \varepsilon} \cdot (t - t_1) \right\}. \quad (4.57)$$

Biorąc pod uwagę oszacowanie (4.55), z nierówności (4.57) dostajemy:

$$\|y^+(t)\|^2 \geq \frac{-V_{-\varepsilon}(t_1, y^+(t_1))}{\|S\|_0 + \varepsilon} \cdot \exp \left\{ \frac{1 - 2\|A\|_0 \varepsilon}{\|S\|_0 + \varepsilon} \cdot (t - t_1) \right\}, \quad t^* < t_1 \leq t.$$

Widać stąd, że rozwiązanie $y^+(t)$ układu (4.5) wzrasta w $+\infty$. Przeczy to temu, że $y^+ \in E^+$. Tak więc dla wszystkich początkowych wektorów $y^+ \in E^+$ odpowiednie rozwiązanie układu (4.5) $y^+(t) = \Omega_0^t y^+$ spełnia nierówność (4.50) dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Przy założeniu, że spełnione są nierówności (4.50), mają miejsce następujące oszacowania:

$$\begin{aligned} \|y^+(t)\| &= \left(\frac{V_0(t, y^+(t)) - V_{-\varepsilon}(t, y^+(t))}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{V_0(t, y^+(t))}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\frac{V_0(\tau, y^+(\tau))}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\|S\|_0} (t - \tau) \right\} \leq \\ &\leq \left(\frac{\|S\|_0}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \|y^+(\tau)\| \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\|S\|_0} (t - \tau) \right\}, \quad \tau \leq t. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Porównując otrzymane oszacowanie (4.58) z oszacowaniem (3.14), mamy $\gamma = \frac{1}{2\|S\|_0}$. Dla stałej \bar{K} zapiszmy równość:

$$\sup_{\tau \leq t} \frac{\|y^+(t)\|}{\|y^+(\tau)\|} \exp \left\{ \frac{1}{2\|S\|_0} (t - \tau) \right\} = \sup_{\tau \leq t} \frac{\|\Omega_0^t y^+\|}{\|\Omega_0^\tau y^+\|} \exp \left\{ \frac{1}{2\|S\|_0} (t - \tau) \right\} = \bar{K}(y^+).$$

Z oszacowania (4.58) wynika, że

$$\bar{K}(y^+) \leq \left(\frac{\|S\|_0}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}},$$

dla dowolnej ustalonej wartości ε , która spełnia nierówność (4.51).

Przechodząc w tej nierówności do granicy przy $\varepsilon \rightarrow \frac{1}{2\|A\|_0} - 0$, otrzymujemy

$$\bar{K}(y^+) \leq (2\|A\|_0 \|S\|_0)^{\frac{1}{2}},$$

co przekonuje nas w tym, że stałe \bar{K} , γ w oszacowaniu (3.14) można wybrać w następującej postaci:

$$\bar{K} = (2\|A\|_0 \|S\|_0)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = \frac{1}{2\|S\|_0}. \quad (4.59)$$

Podobnie jak wcześniej dowodzimy, że zbiór

$$M^- = \bigcap_{t=0}^{-\infty} M_t^-, \quad (4.60)$$

jest $(n-r)$ wymiarową podprzestrzenią z \mathbb{R}^n , $M^- = E^-$ i dla każdej ustalonej wartości wektora $y^- \in E^-$ dla odpowiednich rozwiązań układu (4.5)

$$y^-(t) = \Omega_0^t y^-, \quad (4.61)$$

ma miejsce nierówność

$$V_\varepsilon(t, y^-(t)) = \langle S(t)y^-(t), y^-(t) \rangle + \varepsilon \|y^-(t)\|^2 < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.62)$$

dla ustalonego $\varepsilon \in [0, \frac{\beta}{2\|A\|_0})$.

Z nierówności (4.10), przy podstawieniu $y \rightarrow y^-$, dostajemy

$$\frac{d}{dt}[-V_0(t, y^-(t))] \geq \|y^-(t)\|^2 \geq \frac{1}{\|S\|_0}[-V_0(t, y^-(t))].$$

Całkując zapisaną nierówność w granicach od τ do t ($\tau \leq t$), mamy

$$-V_0(t, y^-(t)) \geq -V_0(\tau, y^-(\tau)) \exp\left\{\frac{1}{\|S\|_0}(t-\tau)\right\}, \quad \tau \leq t,$$

a stąd

$$-V_0(\tau, y^-(\tau)) \geq -V_0(t, y^-(t)) \exp\left\{-\frac{1}{\|S\|_0}(t-\tau)\right\}, \quad \tau \leq t.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że

$$-V_0(\tau, y^-(\tau)) \geq \|S\|_0 \|y^-(t)\|^2 \exp\left\{-\frac{1}{\|S\|_0}(t-\tau)\right\}, \quad \tau \leq t. \quad (4.63)$$

Uwzględniając teraz nierówność (4.62) i oszacowanie (4.63), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|y^-(\tau)\| &= \left(\frac{V_\varepsilon(\tau, y^-(\tau)) - V_0(\tau, y^-(\tau))}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{-V_0(\tau, y^-(\tau))}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\frac{\|S\|_0}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \|y^-(\tau)\| \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\|S\|_0}(t-\tau)\right\}, \quad \tau \leq t. \end{aligned}$$

Zmieniając oznaczenia $t \rightarrow \tau$, $\tau \rightarrow t$, mamy:

$$\|y^-(t)\| \leq \left(\frac{\|S\|_0}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \|y^-(\tau)\| \exp\left\{\frac{1}{2\|S\|_0}(t-\tau)\right\}, \quad t \leq \tau, \quad t, \tau \in \mathbb{R}. \quad (4.64)$$

Porównując oszacowania (3.15) i (4.64), otrzymujemy:

$$\bar{K} = \left(\frac{\|S\|_0}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = \frac{1}{2\|S\|_0}.$$

Uwzględniając to, że wartość ε można wybrać dowolnie bliską $\frac{1}{2\|A\|_0}$ (nierówność (4.51)), to stałą \bar{K} można wybrać w postaci (4.59).

W ten sposób udowodniliśmy, że układ liniowy (4.5) jest eksponencjalnie dychotomiczny na całej osi \mathbb{R} . Część jego rozwiązań spełnia oszacowanie (4.58), a dla innej części spełnione jest oszacowanie (4.64), a więc zachodzą odpowiednie oszacowania (3.14), (3.15). Przy tym stałe \bar{K}, γ można wybrać w postaci (4.59).

Udowodnimy teraz, że stałe K, γ z oszacowania (1.7) można wybrać w postaci (4.3). W tym celu zauważmy, że z nierówności (4.50) wynika, że

$$\langle S(t)\tilde{C}(t)u, \tilde{C}(t)u \rangle - \varepsilon \|\tilde{C}(t)u\|^2 \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad (4.65)$$

gdzie $\tilde{C}(t) = \Omega_0^t P \Omega_t^0$, P jest stałą macierzą rzutowania na podprzestrzeń E^+ wzdłuż E^- , natomiast ε jest ustalonym parametrem spełniającym nierówności (4.51). Podobnie z nierówności (4.62) wynika:

$$\langle S(t)[I_n - \tilde{C}(t)]u, [I_n - \tilde{C}(t)]u \rangle + \varepsilon \|[I_n - \tilde{C}(t)]u\|^2 \leq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n. \quad (4.66)$$

Rozpatrując różnicę otrzymaną z nierówności (4.65) i (4.66), dostajemy

$$\varepsilon \left\{ \|[I_n - \tilde{C}(t)]u\|^2 + \|\tilde{C}(t)u\|^2 \right\} - 2\langle S(t)\tilde{C}(t)u, u \rangle + \langle S(t)u, u \rangle \leq 0. \quad (4.67)$$

Otrzymaną nierówność (4.67) podzielmy przez $\varepsilon > 0$ i zapiszmy w następującej postaci:

$$\|\tilde{C}(t)u - \frac{1}{2\varepsilon}S(t)u\|^2 + \|[I_n - \tilde{C}(t)]u + \frac{1}{2\varepsilon}S(t)u\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon^2}\|S(t)u\|^2 \leq 0.$$

Mamy stąd:

$$\begin{aligned} \|\tilde{C}(t)u\| &= \|\tilde{C}(t)u - \frac{1}{2\varepsilon}S(t)u + \frac{1}{2\varepsilon}S(t)u\| \leq \|\tilde{C}(t) - \frac{1}{2\varepsilon}S(t)u\| + \frac{1}{2\varepsilon}\|S(t)u\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\|S\|_0\|u\| + \frac{1}{2\varepsilon}\|S\|_0\|u\|, \\ \|[I_n - \tilde{C}(t)]u\| &= \|[I_n - \tilde{C}(t)]u + \frac{1}{2\varepsilon}S(t)u - \frac{1}{2\varepsilon}S(t)u\| \leq \\ &\leq \|[I_n - \tilde{C}(t)]u + \frac{1}{2\varepsilon}S(t)u\| + \frac{1}{2\varepsilon}\|S(t)u\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\|S\|_0\|u\| + \frac{1}{2\varepsilon}\|S\|_0\|u\|. \end{aligned}$$

W ten sposób wnioskujemy, że zmienne macierze rzutowania $\tilde{C}(t) = \Omega_0^t P \Omega_t^0$ i $I_n - \tilde{C}(t)$ są ograniczone

$$\max \left\{ \|\tilde{C}\|_0, \|I_n - \tilde{C}\|_0 \right\} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) \frac{\|S\|_0}{\varepsilon}. \quad (4.68)$$

Ponieważ parametr $\varepsilon > 0$ może przyjmować wartości dowolnie bliskie $\frac{1}{2\|A\|_0}$ (nierówność (4.51)), to z nierówności (4.68) wynika:

$$\max \left\{ \|\tilde{C}\|_0, \|I_n - \tilde{C}\|_0 \right\} \leq (1 + \sqrt{2})\|A\|_0\|S\|_0. \quad (4.69)$$

Teraz oszacujemy funkcję Greena (3.16). Mamy:

$$\begin{aligned} \|\Omega_0^t P \Omega_\tau^0\| &= \|\Omega_\tau^t \tilde{C}(\tau)\| \leq \bar{K} \|\tilde{C}(\tau)\| \exp \{-\gamma(t - \tau)\} \leq \\ &\leq \bar{K}(1 + \sqrt{2})\|A\|_0\|S\|_0 \exp \{-\gamma(t - \tau)\}, \quad \tau \leq t. \end{aligned}$$

Podobnie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \|\Omega_0^t[I_n - P]\Omega_\tau^0\| &= \|\Omega_\tau^t[I_n - \tilde{C}(\tau)]\| \leq \bar{K}\|I_n - \tilde{C}(\tau)\| \exp\{\gamma(t - \tau)\} \leq \\ &\leq \bar{K}(1 + \sqrt{2})\|A\|_0\|S\|_0 \exp\{\gamma(t - \tau)\}, \quad t \leq \tau. \end{aligned}$$

Uwzględniając równości (4.59), dostajemy

$$K = \bar{K}(1 + \sqrt{2})\|A\|_0\|S\|_0 = (2\|A\|_0\|S\|_0)^{1/2}(1 + \sqrt{2})\|A\|_0\|S\|_0 = (2 + \sqrt{2})(\|A\|_0\|S\|_0)^{3/2},$$

co odpowiada pierwszej z równości (4.3). Na tym kończy się dowód twierdzenia 4.1. \square

Uwaga 4.1. Lewa strona nierówności (4.1) jest pochodną formy kwadratowej

$$V = \langle S(x)y, y \rangle,$$

wzdłuż rozwiązań układu (1.1). Przy czym forma ta w odróżnieniu od tradycyjnej funkcji Lapunowa może zmieniać znak.

Rozpatrzmy pewne przykłady ilustrujące badanie własności regularności.

PRZYKŁAD 4.1. Weźmy pod uwagę układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x), & \frac{dy_1}{dt} &= (2 + \sin q_1(x))y_1 + q_2(x)y_2, \\ & & \frac{dy_2}{dt} &= q_2(x)y_1 - (3 + 2 \cos q_3(x))y_2, \end{aligned} \quad (4.70)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^m$, funkcja wektorowa $f(x) \in C_{\text{Lip}}(\mathbb{R}^m)$, funkcje skalarne $q_j(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$, $j = 1, 2, 3$.

Sprawdźmy, że pochodna formy kwadratowej $V = y_1^2 - y_2^2$ wzdłuż rozwiązań układu (4.70) jest dodatnio określona. Mamy:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2y_1\dot{y}_1 - 2y_2\dot{y}_2 = 2y_1[(2 + \sin q_1(x))y_1 + q_2(x)y_2] - 2y_2[q_2(x)y_1 - (3 + 2 \cos q_3(x))y_2] = \\ &= 2(2 + \sin q_1(x))y_1^2 + 2(3 + 2 \sin q_3(x))y_1^2 \geq 2(y_1^2 + y_2^2). \end{aligned}$$

Wynika stąd, że układ (4.70) jest regularny.

PRZYKŁAD 4.2. Teraz, rozpatrzmy następujący układ

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= (2 + \sin q_1(x))y_1, \\ \frac{dx}{dt} &= f(x), & \frac{dy_2}{dt} &= q_4(x)y_1 - (3 + 2 \cos q_2(x))y_2, \\ & & \frac{dy_3}{dt} &= q_5(x)y_1 + q_6(x)y_2 + (5 + 3 \sin q_3(x))y_3, \end{aligned} \quad (4.71)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^m$, funkcja wektorowa $f(x) \in C_{\text{Lip}}(\mathbb{R}^m)$ oraz funkcje skalarne $q_j(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$, $j = \overline{1, 6}$. Oznaczmy $|q_j|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |q_j(x)|$, $|q|_0 = \max\{|q_4|_0, |q_5|_0, |q_6|_0\}$ i w układzie (4.71) dokonajmy zamiany zmiennych:

$$y_1 = \varepsilon^2 z_1, \quad y_2 = \varepsilon z_2, \quad y_3 = z_3, \quad (4.72)$$

gdzie ε jest małym dodatnim parametrem. Stąd, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= (2 + \sin q_1(x))z_1, \\ \frac{dx}{dt} &= f(x), \quad \frac{dz_2}{dt} = \varepsilon q_4(x)z_1 - (3 + 2 \cos q_2(x))z_2, \\ \frac{dz_3}{dt} &= \varepsilon^2 q_5(x)z_1 + \varepsilon q_6(x)z_2 + (5 + 3 \sin q_3(x))z_3. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Zapiszmy pochodną formy kwadratowej

$$V(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2, \quad (4.74)$$

wzdłuż rozwiązań układu (4.73). Mamy

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2(2 + \sin q_1(x))z_1^2 - 2z_2 [\varepsilon q_4(x)z_1 - (3 + 2 \cos q_2(x))z_2] + \\ &\quad + 2z_3 [\varepsilon^2 q_5(x)z_1 + \varepsilon q_6(x)z_2 + (5 + 3 \sin q_3(x))z_3] \geq \\ &\geq 2z_1^2 + 2z_2^2 + 4z_3^2 - 2\varepsilon |q_4|_0 |z_1| |z_2| - 2\varepsilon^2 |q_5|_0 |z_1| |z_3| - 2\varepsilon |q_6|_0 |z_3| |z_2| \geq \\ &\geq 2z_1^2 + 2z_2^2 + 4z_3^2 - 2\varepsilon |q|_0 (|z_1| |z_2| + \varepsilon |z_1| |z_3| + |z_3| |z_2|) = \Phi_\varepsilon(|z_1|, |z_2|, |z_3|), \end{aligned}$$

gdzie forma kwadratowa

$$\Phi_\varepsilon(t_1, t_2, t_3) = 2t_1^2 + 2t_2^2 + 4t_3^2 - 2\varepsilon |q|_0 (t_1 t_2 + \varepsilon t_1 t_3 + t_2 t_3), \quad (4.75)$$

zależy od parametru $\varepsilon > 0$. Zapiszmy następnie macierz Θ_ε , która odpowiada formie kwadratowej (4.75):

$$\Theta_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & -\varepsilon |q|_0 & -\varepsilon^2 |q|_0 \\ -\varepsilon |q|_0 & 2 & -\varepsilon |q|_0 \\ -\varepsilon^2 |q|_0 & -\varepsilon |q|_0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Widać stąd, że istnieje dostatecznie mała wartość $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, dla której zachodzą nierówności:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -\varepsilon_0 |q|_0 \\ -\varepsilon_0 |q|_0 & 2 \end{pmatrix} > 0, \quad \det \Theta_{\varepsilon_0} > 0,$$

co gwarantuje dodatnią określoność formy kwadratowej (4.75). W ten sposób wnioskujemy, że pochodna formy kwadratowej (4.74) względem układu (4.73) dla $\varepsilon = \varepsilon_0$ jest dodatnio określona. Wracając do zmiennych y_j z uwzględnieniem (4.72), otrzymujemy formę kwadratową

$$\bar{V}(y_1, y_2, y_3) = V(\varepsilon_0^{-2} y_1, \varepsilon_0^{-1} y_2, y_3) = \varepsilon_0^{-4} y_1^2 - \varepsilon_0^{-2} y_2^2 + y_3^2,$$

której pochodna względem wyjściowego układu (4.71) jest dodatnio określona. Oznacza to, że układ (4.71) jest regularny.

PRZYKŁAD 4.3. Rozpatrzmy układ równań:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_1 \sin x + y_2 \cos^2 x, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 - y_2 \sin x. \end{aligned} \quad (4.76)$$

W naszym przypadku mamy

$$A(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos^2 x \\ 1 & -\sin x \end{pmatrix}.$$

Symetryczną macierz $S(x)$ wybierzmy w postaci:

$$S(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\sin x \end{pmatrix}.$$

Obliczając lewą stronę oszacowania (4.1), otrzymujemy:

$$\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x) = \begin{pmatrix} 2 & -\sin x \\ -\sin x & 2 - \cos x \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy, że zapisana powyżej macierz jest dodatnio określona. Faktycznie, zapisując odpowiednią formę kwadratową, dostajemy

$$\begin{aligned} 2y_1^2 - 2(\sin x)y_1y_2 + (2 - \cos x)y_2^2 &\geq 2y_1^2 - y_1^2 - y_2^2 \sin^2 x + (2 - \cos x)y_2^2 = \\ &= y_1^2 + (2 - \cos x - \sin^2 x)y_2^2 \geq \frac{3}{4}(y_1^2 + y_2^2). \end{aligned}$$

W ten sposób, na podstawie udowodnionego twierdzenia 4.1, wnioskujemy, że układ (4.76) jest regularny.

Proponujemy samodzielnie zbadać regularność następujących układów przy pomocy funkcji Lapunowa.

$$1. \quad \frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2 \sin x & 2010 \sin 2x \\ 2010 \sin 2x & 2 + \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Wskazówka: } V = y_1^2 - y_2^2.$$

$$2. \quad \frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \operatorname{tgh} x & 2010 \\ 2010 & -2 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Wskazówka: } V = y_1^2 - y_2^2.$$

$$3. \quad \frac{dx}{dt} = 2010 \sin x, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos^2 x \\ 1 & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Wskazówka: } V = py_1y_2 - y_2^2 \sin x.$$

$$4. \frac{dx}{dt} = \pi^{\cos x}, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos^4 x \\ \cos^2 x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Wskazówka: $V = py_1y_2 + (y_1^2 - y_2^2) \sin x$.

$$5. \frac{dx}{dt} = \frac{1+x+x^2}{2-3x+2x^2}, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^3 x & \cos^{2010} x \\ \cos^{2012} x & -\sin^3 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Wskazówka: $V = py_1y_2 + (y_1^2 - y_2^2) \sin x$.

$$6. \frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{tgh} x & 2010 \\ 1 & \operatorname{tgh} x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Wskazówka: $V = y_1y_2$.

$$7. \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{tgh} x & 0 \\ 1 & \operatorname{tgh} x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Wskazówka: $V = py_1y_2 + y_2^2 \operatorname{tgh} x$.

5. Pewne konstrukcje funkcji Lapunowa w teorii liniowych rozszerzeń układów dynamicznych

Rozpatrzmy teraz warunki konieczne regularności układu (1.1). Zwróćmy uwagę na to, że spełnianie nierówności (4.1) z pewną symetryczną macierzą $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$ jest równoważne spełnianiu następującej nierówności:

$$\left\langle \left[\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x) \right] y, y \right\rangle \geq \|y\|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad (5.1)$$

dla pewnej innej symetrycznej macierzy $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$. Przy czym wystarczy zamienić macierz $S(x)$ na $-S(x)$. Jeśli nawet dla pewnej macierzy $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$ będzie zachodziła następująca nierówność:

$$\left\langle \left[\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x) \right] y, y \right\rangle \geq \beta \|y\|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (5.1')$$

z pewną dodatnią stałą β , niezależną od $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, to zmieniając oznaczenia: $\frac{1}{\beta}S(x) \rightarrow S(x)$, dochodzimy do nierówności (5.1).

Mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.1. *Załóżmy, że układ (1.1) ma jedyną funkcję Greena (1.6) spełniającą oszacowanie (1.7). Wówczas istnieją niezdegenerowane symetryczne macierze $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$, dla których zachodzi warunek (5.1).*

DOWÓD.

Rozpatrzmy macierz $S(x)$, którą zapisujemy w postaci różnicy macierzy symetrycznych:

$$S(x) = S_1(x) - S_2(x), \quad (5.2)$$

gdzie

$$S_1(x) = 2 \int_{-\infty}^0 [C(x) - I_n]^T [\Omega_0^z(x)]^T \Omega_0^z(x) [C(x) - I_n] dz, \quad (5.3)$$

$$S_2(x) = 2 \int_0^{+\infty} [C(x)]^T [\Omega_0^z(x)]^T \Omega_0^z(x) C(x) dz. \quad (5.4)$$

Przypomnijmy oszacowanie (1.10) dla pomocniczej funkcji (1.11), mające postać

$$\begin{aligned} \|\Omega_0^t(x)C(x)\| &\leq Ke^{-\gamma t}, & t \geq 0, \\ \|\Omega_0^t(x)[C(x) - I_n]\| &\leq Ke^{\gamma t}, & t < 0, \end{aligned}$$

gdzie dodatnie stałe K, γ są niezależne od $x \in \mathbb{R}^m$ i $t \in \mathbb{R}$. Wynika stąd, że całki w równościach (5.3), (5.4) są jednostajnie zbieżne na $x \in \mathbb{R}^m$, a zatem macierze $S_1(x)$, $S_2(x)$ w sposób ciągły zależą od zmiennej $x \in \mathbb{R}^m$.

Sprawdźmy, że macierze $S_1(x)$, $S_2(x)$ należą do przestrzeni $C'(\mathbb{R}^m; f)$. W tym celu, przykładowo, dla macierzy (5.4) zapiszmy superpozycję $S_2(x(t; x))$ i uprościmy następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned} S_2(x(t; x)) &= 2 \int_0^{+\infty} [C(x(t; x))]^T [\Omega_0^z(x(t; x))]^T \Omega_0^z(x(t; x)) C(x(t; x)) dz = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} [\Omega_0^t(x) C(x) \Omega_t^0(x)]^T [\Omega_t^{z+t}(x)]^T [\Omega_t^{z+t}(x)] \Omega_0^t(x) C(x) \Omega_t^0(x) dz = \\ &= 2 \int_t^{+\infty} [\Omega_0^t(x) C(x) \Omega_t^0(x)]^T [\Omega_t^\sigma(x)]^T [\Omega_t^\sigma(x)] \Omega_0^t(x) C(x) \Omega_t^0(x) d\sigma = \\ &= 2 \int_t^{+\infty} [\Omega_t^0(x)]^T C^T(x) [\Omega_0^\sigma(x)]^T \Omega_0^\sigma(x) C(x) \Omega_t^0(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Widać stąd, że superpozycja $S_2(x(t; x))$ jest funkcją różniczkowalną względem zmiennej t . Znajdźmy pochodną:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_2(x(t; x)) &= -2 [\Omega_t^0(x)]^T C^T(x) [\Omega_0^t(x)]^T \Omega_0^t(x) C(x) \Omega_t^0(x) + \\ &\quad - A^T(x(t; x)) S_2(x(t; x)) - S_2(x(t; x)) A^T(x(t; x)). \end{aligned}$$

Podstawiając $t = 0$, otrzymujemy:

$$\dot{S}_2(x) = -2C^T(x)C(x) - A^T(x)S_2(x) - S_2(x)A(x). \quad (5.5)$$

Podobnie można sprawdzić, że macierz $S_1(x)$ należy do przestrzeni $C'(\mathbb{R}^m; f)$ i dla jej pochodnej $\dot{S}_1(x)$ spełniona jest równość:

$$\dot{S}_1(x) = 2[C(x) - I_n]^T [C(x) - I_n] - A^T(x)S_1(x) - S_1(x)A(x). \quad (5.6)$$

Odejmując równości (5.6) i (5.5) stronami, dla różnicy macierzy $S_1(x) - S_2(x) = S(x)$, otrzymujemy:

$$\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x) = 2[C(x) - I_n]^T [C(x) - I_n] + 2C^T(x)C(x).$$

Zapisując odpowiednią formę kwadratową, mamy:

$$\begin{aligned} \langle [\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x)] y, y \rangle &= 2\langle [C(x) - I_n] y, [C(x) - I_n] y \rangle + \\ &\quad + 2\langle C(x)y, C(x)y \rangle = 2\left\{ \|[C(x) - I_n] y\|^2 + \|C(x)y\|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dalej mamy:

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|[I - C(x) + C(x)] y\| \leq \|[I - C(x)] y\| + \|C(x)y\|, \\ \|y\|^2 &\leq \|[I - C(x)] y\|^2 + \|C(x)y\|^2 + 2\|[I - C(x)] y\| \cdot \|C(x)y\| \leq \\ &\leq 2\left[\|[I - C(x)] y\|^2 + \|C(x)y\|^2 \right]. \end{aligned}$$

W ten sposób, z równości (5.7), otrzymujemy oszacowanie (5.1).

Pokażemy teraz, że macierz (5.2) jest niezdegenerowana. W tym celu oszacujemy z góry i z dołu formę kwadratową $\langle S_1(x)y, y \rangle$ z symetryczną macierzą współczynników (5.3). Uwzględniając własność macierzy rzutowania $C^2(x) \equiv C(x)$, $[I_n - C(x)]^2 \equiv I_n - C(x)$, otrzymujemy oszacowanie z góry w postaci

$$\begin{aligned} \langle S_1(x)y, y \rangle &= 2 \int_{-\infty}^0 \langle \Omega_0^z(x) [I_n - C(x)] y, \Omega_0^z(x) [I_n - C(x)] y \rangle dz \leq \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^0 \|\Omega_0^z(x) [I_n - C(x)] y\|^2 dz = 2 \int_{-\infty}^0 \|\Omega_0^z(x) [I_n - C(x)]^2 y\|^2 dz \leq \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^0 \|\Omega_0^z(x) [I_n - C(x)]\|^2 dz \| [I_n - C(x)] y \|^2 \leq \alpha_2 \| [I_n - C(x)] y \|^2. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, z nierówności

$$\| [I_n - C(x)] y \| = \|\Omega_z^0(x) \Omega_z^z(x) [I_n - C(x)] y\| \leq \|\Omega_z^0(x)\| \|\Omega_z^z(x) [I_n - C(x)] y\|,$$

otrzymujemy:

$$\|\Omega_z^z(x) [I_n - C(x)] y\|^2 \geq \frac{1}{\|\Omega_z^0(x)\|^2} \| [I_n - C(x)] y \|^2.$$

Uzyskana nierówność pozwala oszacować z dołu formę kwadratową $\langle S_1(x)y, y \rangle$. Rzeczywiście, mamy

$$\begin{aligned} \langle S_1(x)y, y \rangle &= 2 \int_{-\infty}^0 \langle \Omega_0^z(x) [I_n - C(x)] y, \Omega_0^z(x) [I_n - C(x)] y \rangle dz = \\ &= 2 \int_{-\infty}^0 \|\Omega_0^z(x) [I_n - C(x)] y\|^2 dz \geq \\ &\geq 2 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\|\Omega_z^0(x)\|^2} dz \cdot \| [I_n - C(x)] y \|^2 \geq \alpha_1 \| [I_n - C(x)] y \|^2. \end{aligned}$$

Podobnie można oszacować z góry i z dołu formę kwadratową $\langle S_2(x)y, y \rangle$, gdzie odpowiednia symetryczna macierz $S_2(x)$ ma postać (5.4).

W ten sposób dla dwóch form kwadratowych $\langle S_j y, y \rangle$, $j = 1, 2$, z symetrycznymi macierzami $S_j = S_j(x)$ o postaci (5.3), (5.4), mają miejsce oszacowania:

$$\begin{cases} \alpha_1 \|(I_n - C)y\|^2 \leq \langle S_1 y, y \rangle \leq \alpha_2 \|(I_n - C)y\|^2, \\ \alpha_3 \|Cy\|^2 \leq \langle S_2 y, y \rangle \leq \alpha_4 \|Cy\|^2, \end{cases} \quad \alpha_i = \text{const} > 0, \quad (5.8)$$

gdzie $C = C(x)$ jest macierzą rzutowania: $C^2 = C$.

Pokażemy, że z oszacowań (5.8) wynika brak degeneracji różnicy macierzy $S_1 - S_2$. W tym celu ustalmy $x \in \mathbb{R}^m$ i doprowadźmy macierz rzutowania C do postaci Jordana:

$$Q^{-1}CQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r,$$

gdzie Q jest ortogonalną macierzą: $Q^T = Q^{-1}$. Teraz w nierównościach (5.8) dokonajmy zamiany zmiennych $y = Qz$. Ponieważ $\|CQz\| = \|Q^{-1}CQz\|$, to nierówności (5.8) przejmą postać:

$$\begin{cases} \alpha_1 \|(I_n - J_r)z\|^2 \leq \langle \tilde{S}_1 z, z \rangle \leq \alpha_2 \|(I_n - J_r)z\|^2, \\ \alpha_3 \|J_r z\|^2 \leq \langle \tilde{S}_2 z, z \rangle \leq \alpha_4 \|J_r z\|^2, \end{cases} \quad \alpha_i = \text{const} > 0, \quad (5.9)$$

gdzie $\tilde{S}_j = Q^{-1}S_jQ$, $j = 1, 2$. Z nierówności (5.9) wynika, że macierze \tilde{S}_j mają bloko-diagonalną postać:

$$\tilde{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_2 = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

przy czym obydwie macierze S_{11}, S_{22} są dodatnio określone. Wynika stąd, że różnica macierzy $\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2 = Q^{-1}(S_1 - S_2)Q$ jest macierzą niezdegenerowaną. To kończy dowód twierdzenia. \square

Uwaga 5.1. Struktura macierzy (5.3), (5.4) może być uogólniona w następujący sposób:

$$S_1(x) = \int_{-\infty}^0 [C(x) - I_n]^T [\Omega_0^z(x)]^T H_1(x(z; x)) \Omega_0^z(x) [C(x) - I_n] dz = S_1(x; H_1) \quad (5.10)$$

$$S_2(x) = \int_0^{+\infty} [C(x)]^T [\Omega_0^z(x)]^T H_2(x(z; x)) \Omega_0^z(x) C(x) dz = S_2(x; H_2) \quad (5.11)$$

gdzie $H_1(x), H_2(x)$ to dowolne dodatnio określone symetryczne macierze, tzn.

$$\langle H_i(x)y, y \rangle \geq h\|y\|^2, \quad h = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2, \quad H_i(x) \in C^0(\mathbb{R}^m). \quad (5.12)$$

Przy tym pochodna względem układu (1.1) formy kwadratowej

$$V = \langle [S_1(x; H_1) - S_2(x; H_2)] y, y \rangle, \quad (5.13)$$

jest dodatnio określona, zatem spełniona jest nierówność (5.1') z macierzą

$$S(x) = S_1(x; H_1) - S_2(x; H_2) \quad \text{i} \quad \beta = 0, 5h > 0.$$

Uwaga 5.2. Przy zmianie dwóch macierzy $H_1(x), H_2(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$, spełniających (5.12), zbiór form kwadratowych (5.13) będzie zawarty w zbiorze form kwadratowych mających postać

$$V = \langle [S_1(x; H) - S_2(x; H)] y, y \rangle,$$

z jedną dodatnio określoną symetryczną macierzą $H(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$.

Faktycznie, dla dowolnych ustalonych symetrycznych, dodatnio określonych, macierzach $H_1(x), H_2(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$, istnieje dodatnio określona macierz $H(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ taka, że spełniona jest równość:

$$S_1(x; H_1) - S_2(x; H_2) = S_1(x; H) - S_2(x; H). \quad (5.14)$$

Taką macierz $H(x)$ można wybrać następująco:

$$H(x) = [C(x) - I_n]^T H_1(x) [C(x) - I_n] + [C(x)]^T H_2(x) C(x) \quad (5.15)$$

Podstawmy macierz (5.15) do równości (5.10). Uwzględniając to, że macierz $C(x)$ jest macierzą rzutowania, tzn.

$$C^2(x) \equiv C(x), \quad [I_n - C(x)]^2 \equiv I_n - C(x), \quad C(x) [I_n - C(x)] \equiv [I_n - C(x)] C(x) \equiv 0,$$

a także, że spełnione są równości:

$$C(x(t; x)) \equiv \Omega_0^t(x) C(x) \Omega_t^0(x), \quad I_n - C(x(t; x)) \equiv \Omega_0^t(x) [I_n - C(x)] \Omega_t^0(x),$$

otrzymujemy równość

$$S_1(x; H_1) = S_1(x; H).$$

Podobnie otrzymujemy: $S_2(x; H_2) = S_2(x; H)$.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.2. *Niech układ (1.1) ma jedyną funkcję Greena (1.6) z oszacowaniem (1.7), wówczas każda symetryczna macierz $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$, dla której zachodzi warunek (5.1), będzie spełniać nierówność:*

$$\langle [S(x) - S(x)C(x) - C^T(x)S(x)] y, y \rangle \geq \beta \|y\|^2 \quad (5.16)$$

gdzie $\beta = \frac{1}{2\|A+A^T\|_0}$, $\|A + A^T\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \|A(x) + A^T(x)\|$.

DOWÓD.

Z istnienia jedynej funkcji Greena (1.6) wynika, że układ równań liniowych

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t; x))y$$

jest eksponencjalnie dychotomiczny na R dla każdej ustalonej wartości $x \in \mathbb{R}^n$. Wszystkie jego rozwiązania, które dążą do zera w $+\infty$, można zapisać w postaci

$$y^+(t) = \Omega_0^t(x) C(x) \eta, \quad (5.17)$$

gdzie η jest dowolnym wektorem z \mathbb{R}^n .

Warunek (5.1) oznacza, że pochodna formy kwadratowej $V = \langle S(x)y, y \rangle$ względem rozwiązań układu (1.1) jest dodatnio określona. Wyjaśnimy, na ile tę formę kwadratową można zaburzyć, tzn. na ile można ją zastąpić formą postaci

$$V_\varepsilon = \langle S(x)y, y \rangle + \varepsilon \|y\|^2, \quad (5.18)$$

tak, aby jej pochodna względem rozwiązań układu (1.1) również była dodatnio określona. Obliczając tę pochodną, mamy:

$$\dot{V}_\varepsilon = \left\langle \left[\dot{S}(x) + (S(x) + \varepsilon I_n)A(x) + A^T(x)(S(x) + \varepsilon I_n) \right] y, y \right\rangle \geq (1 - |\varepsilon| \cdot \|A + A^T\|_0) \|y\|^2. \quad (5.19)$$

W ten sposób, zakładając, że spełnione są nierówności

$$-\frac{1}{\|A + A^T\|_0} < \varepsilon < \frac{1}{\|A + A^T\|_0}, \quad (5.20)$$

wnioskujemy, że pochodna względem rozwiązań układu (1.1) zaburzonej formy kwadratowej (5.18) jest dodatnio określona.

Pokażemy, że dla wszystkich rozwiązań (5.17), które dążą do zera na $+\infty$, musi koniecznie zachodzić nierówność:

$$\langle S(x(t; x))y^+(t), y^+(t) \rangle + \varepsilon_1 \|y^+(t)\|^2 < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.21)$$

gdzie

$$0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{\|A + A^T\|_0}. \quad (5.22)$$

Przypuśćmy, że nierówność (5.21) nie zachodzi, co oznacza, że istnieje taka wartość $t = t_0$, dla której spełniona jest następująca nierówność

$$\langle S(x(t_0; x))y^+(t_0), y^+(t_0) \rangle + \varepsilon_1 \|y^+(t_0)\|^2 \geq 0. \quad (5.23)$$

Ponieważ funkcja $\langle S(x(t; x))y^+(t), y^+(t) \rangle + \varepsilon_1 \|y^+(t)\|^2$ jest ściśle rosnąca, to z nierówności (5.23) wynika, że

$$\langle S(x(t_0; x))y^+(t_0), y^+(t_0) \rangle + \varepsilon_1 \|y^+(t_0)\|^2 > 0 \quad \forall t \in (t_0, +\infty). \quad (5.24)$$

Na podstawie (5.19) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\langle S(x(t; x))y^+(t), y^+(t) \rangle + \varepsilon_1 \|y^+(t)\|^2] &\geq (1 - \varepsilon_1 \|A + A^T\|_0) \|y^+(t)\|^2 \geq \\ &\geq \frac{(1 - \varepsilon_1 \|A + A^T\|_0)}{\|S\|_0 + \varepsilon_1} [\langle S(x(t; x))y^+(t), y^+(t) \rangle + \varepsilon_1 \|y^+(t)\|^2]. \end{aligned}$$

Z otrzymanej nierówności wynika, że funkcja $\langle S(x(t; x))y^+(t), y^+(t) \rangle + \varepsilon_1 \|y^+(t)\|^2$ rośnie w $+\infty$ do $+\infty$, co sprzeczne jest z tym, że $y^+(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$. Otrzymana sprzeczność pokazuje słuszność (5.21).

Podstawiając rozwiązania (5.17) do nierówności (5.21), otrzymujemy dalej:

$$\langle S(x(t; x))\Omega_0^t(x)C(x)\eta, \Omega_0^t(x)C(x)\eta \rangle + \varepsilon_1 \|\Omega_0^t(x)C(x)\eta\|^2 \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.25)$$

Teraz w nierówności (5.25) podstawiamy:

$$\eta = \Omega_t^0(x)\mu.$$

Korzystając z własności: $C(x(t; x)) \equiv \Omega_0^t(x)C(x)\Omega_t^0(x)$, otrzymujemy:

$$\langle S(x(t; x))C(x(t; x))\eta, C(x(t; x))\eta \rangle + \varepsilon_1 \|C(x(t; x))\eta\|^2 \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Podstawiając do otrzymanej nierówności $t = 0$, dostajemy następnie następujące oszacowanie:

$$\langle S(x)C(x)\mu, C(x)\mu \rangle + \varepsilon_1 \|C(x)\mu\|^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m. \quad (5.26)$$

W podobny sposób otrzymujemy oszacowanie

$$\langle S(x)(I_n - C(x))\mu, (I_n - C(x))\mu \rangle - \varepsilon_2 \|(I_n - C(x))\mu\|^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad (5.27)$$

gdzie

$$0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{\|A + A^T\|_0}. \quad (5.28)$$

Odejmując od nierówności (5.27) nierówność (5.26), dostajemy

$$\begin{aligned} \langle S(x)(I_n - C(x))\mu, (I_n - C(x))\mu \rangle - \langle S(x)C(x)\mu, C(x)\mu \rangle &\geq \\ &\geq \varepsilon_2 \|(I_n - C(x))\mu\|^2 + \varepsilon_1 \|C(x)\mu\|^2. \end{aligned}$$

Stąd dochodzimy do następującej nierówności:

$$\begin{aligned} -\langle S(t)C(t)\mu, \mu \rangle - \langle S(t)\mu, C(t)\mu \rangle + \langle S(t)\mu, \mu \rangle &\geq \varepsilon_2 \|(I_n - C(t))\mu\|^2 + \varepsilon_1 \|C(t)\mu\|^2 \geq \\ &\geq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} [\|(I_n - C(t))\mu\|^2 + \|C(t)\mu\|^2] \geq 0, 5 \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \|\mu\|^2. \end{aligned}$$

Ponieważ przy spełnieniu niezależnych nierówności (5.22), (5.28) będzie zachodziła oczywista równość:

$$\sup \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \frac{1}{\|A + A^T\|_0},$$

to otrzymujemy oszacowanie (5.16), co należało udowodnić. \square

Wniosek 5.1. *Założmy, że istnieje pewna symetryczna macierz $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$, dla której zachodzi nierówność (5.1) i macierz ta jest niezdegenerowana: $\det S(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$. Wówczas dowolna inna symetryczna macierz $\tilde{S}(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$, która spełnia nierówność:*

$$\left\langle \left[\tilde{S}(x) + \tilde{S}(x)A(x) + A^T(x)\tilde{S}(x) \right] y, y \right\rangle \geq \|y\|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

także będzie niezdegenerowana, tzn. $\det \tilde{S}(x) \neq 0$ dla $x \in \mathbb{R}^m$.

Faktycznie, jeśli istnieje niezdegenerowana symetryczna macierz $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$, która spełnia warunek (5.1), to układ (1.1) ma jedyną funkcję Greena (1.6) z oszacowaniem (1.7). W ten sposób widzimy, że spełnione są założenia Twierdzenia 5.2. Przy tym macierz $\tilde{S}(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$ spełnia oszacowanie (5.16):

$$\left\langle \left[S(x) - S(x)C(x) - C^T(x)S(x) \right] y, y \right\rangle \geq \beta \|y\|^2, \quad \beta = \text{const} > 0,$$

i oczywiście nie może być zdegenerowana dla żadnej wartości $x \in \mathbb{R}^m$.

Twierdzenie 5.3. *Załóżmy, że istnieje pewna symetryczna niezdegenerowana macierz $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$, dla której zachodzi nierówność (5.1). Wtedy macierz odwrotna $S^{-1}(x)$ jest ograniczona na \mathbb{R}^m , przy czym spełnione jest oszacowanie:*

$$\|S^{-1}(x)\| \leq \|A + A^T\|_0, \quad (5.29)$$

gdzie $\|A + A^T\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \|A(x) + A^T(x)\|$.

DOWÓD. Korzystając z Wniosku 5.1 i oszacowania (5.19), otrzymujemy

$$\det(S(x) + \varepsilon I_n) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad (5.30)$$

dla każdej ustalonej rzeczywistej wartości ε , która spełnia nierówność (5.20). Warunek (5.30) oznacza, że dla wszystkich wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ macierzy symetrycznej $S(x)$ zachodzi nierówność:

$$|\lambda_j| \geq \frac{1}{\|A + A^T\|_0}.$$

Ustalmy pewną wartość $x = x_0 \in \mathbb{R}^m$ i doprowadźmy symetryczną macierz $S = S(x_0)$ do postaci Jordana:

$$S = Q^{-1} \Lambda Q,$$

gdzie Q jest ortogonalną macierzą $Q^{-1} = Q^T$. Teraz szacując normę macierzy odwrotnej, dostajemy:

$$\|S^{-1}\| = \|Q^{-1} \Lambda^{-1} Q\| \leq \|\Lambda^{-1}\| = \max_j \frac{1}{|\lambda_j|} \leq \|A + A^T\|_0,$$

skąd możemy się przekonać o prawdziwości (5.29). \square

Uwaga 5.3. Wyznacznik macierzy $S(x)$ można oszacować w następujący sposób:

$$|\det S(x)| = |\det \Lambda| = |\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n| \geq \left(\frac{1}{\|A + A^T\|_0} \right)^n.$$

Podsumowując można stwierdzić, że w przypadku, kiedy układ (1.1) jest regularny, każda z symetrycznych macierzy $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$, dla której zachodzi nierówność (5.1), jest niezdegenerowana i oprócz tego macierz odwrotna $S^{-1}(x)$ jest ograniczona na \mathbb{R}^m .

Uwaga 5.4.

Jeśli pewna niezdegenerowana macierz $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$ spełnia nierówność (5.1), to dla macierzy $-S^{-1}(x) = \bar{S}(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$ zachodzi następująca nierówność:

$$\left\langle \left[\dot{\bar{S}}(x) - \bar{S}(x)A^T(x) - A(x)\bar{S}(x) \right] z, z \right\rangle \geq \gamma \|z\|^2,$$

gdzie $\gamma = \frac{1}{\|\bar{S}\|_0^2}$. Oznacza to, że pochodna niezdegenerowanej formy kwadratowej $\langle \bar{S}(x)z, z \rangle$ wzdłuż rozwiązań układu sprzężonego do (1.1) względem zmiennych normalnych:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dz}{dt} = -A^T(x)z$$

jest dodatnio określona.

Proponujemy samodzielnie skonstruować funkcję Lapunowa dla następujących układów regularnych.

1. $\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = (1 + 2 \cos x)y.$
2. $\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \left[\lambda + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] y, \quad \lambda = \text{const} \neq 0.$
3. $\frac{dx}{dt} = 10 - \sin 2x, \quad \frac{dy}{dt} = (0, 1 + \cos 2x)y.$
4. $\frac{dx}{dt} = 1 - \sin 2x, \quad \frac{dy}{dt} = (0, 1 + \cos 2x)y.$
5. $\frac{dx}{dt} = 0, 8 - \sin 2x, \quad \frac{dy}{dt} = (0, 8 + \cos 2x)y.$
6. $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2x, \quad \frac{dy}{dt} = \left(\frac{2}{3} + \cos 2x \right) y.$
7. $\frac{dx_1}{dt} = 1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \sin x_2, \quad \frac{dy}{dt} = (13 \cos x_1 - \cos x_2)y.$
8. $\frac{dx_1}{dt} = 1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \omega, \quad \frac{dx_3}{dt} = \cos x_2, \quad \frac{dy}{dt} = (\cos x_1 + \sin x_2 + \sin x_3)y.$

6. Dopełnienie słabo regularnych liniowych rozszerzeń do regularnych

Przypomnijmy, że układ równań (1.1) przyjęto nazywać słabo regularnym, jeżeli ma on przynajmniej jedną funkcję Greena (1.6) z oszacowaniem (1.7). Jeśli układ (1.1) ma dwie różne funkcje Greena:

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)C(x(\tau; x)), & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(x)[C(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases}$$

$$\tilde{G}_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)\tilde{C}(x(\tau; x)), & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(x)[\tilde{C}(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases}$$

to tych funkcji istnieje nieskończenie wiele:

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)C_p(x(\tau; x)), & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(x)[C_p(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases}$$

gdzie $C_p(x) = C(x) + p(C(x) - \tilde{C}(x))$, $p \in \mathbb{R}$. Wynika to z faktu, że dla różnicy $G_0(\tau, x) - \tilde{G}_0(\tau, x)$ zachodzi eksponencjalne oszacowanie:

$$\|G_0(\tau, x) - \tilde{G}_0(\tau, x)\| \leq \tilde{K}e^{-\gamma|\tau|},$$

które oznacza, że

$$\|\Omega_\tau^0(x)[C(x(\tau; x)) - \tilde{C}(x(\tau; x))]\| \leq \tilde{K}e^{-\gamma|\tau|}, \quad \tilde{K}, \gamma = \text{const} > 0.$$

Ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.1. *Załóżmy, że istnieje forma kwadratowa*

$$W = \langle \Theta(x)z, z \rangle, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (6.1)$$

z ograniczoną na \mathbb{R}^m symetryczną macierzą współczynników $\Theta(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$ i niech pochodna tej formy względem rozwiązań sprzężonego do (1.1) układu:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dz}{dt} = -A^T(x)z, \quad (6.2)$$

będzie dodatnio określona, czyli zachodzi nierówność:

$$\dot{W} = \langle [\dot{\Theta}(x) - \Theta(x)A^T(x) - A(x)\Theta(x)]z, z \rangle \geq \|z\|^2. \quad (6.3)$$

Wówczas układ równań (1.1) jest słabo regularny. Przy czym, jeśli dodatkowo założymy, że $\det \Theta(x_0) = 0$ dla pewnej wartości $x_0 \in \mathbb{R}^m$, to układ (1.1) ma nieskończenie wiele różnych funkcji Greena (1.6), a układ (6.2) nie ma żadnej funkcji Greena, a jeżeli $\det \Theta(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^m$, to układy (1.1) i (6.2) będą regularne.

DOWÓD. Rozpatrzmy rozszerzony układ równań:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = A(x)y, \\ \frac{dz}{dt} = y - A^T(x)z. \end{cases} \quad (6.4)$$

Pokażemy, że pochodna niezdegenerowanej formy kwadratowej:

$$V = 2p\langle y, z \rangle + \langle \Theta(x)z, z \rangle, \quad (6.5)$$

względem układu (6.4) dla dostatecznie dużych wartości parametru $p > 0$ jest dodatnio określona. Zapiszmy tę pochodną:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2p\langle \dot{y}, z \rangle + 2p\langle y, \dot{z} \rangle + \langle \dot{\Theta}(x)z, z \rangle + 2\langle \Theta(x)z, \dot{z} \rangle = \\ &= 2p\langle A(x)y, z \rangle + 2p\langle y, y - A^T(x)z \rangle + \langle \dot{\Theta}(x)z, z \rangle + 2\langle \Theta(x)z, y - A^T(x)z \rangle = \\ &= 2p\|y\|^2 + 2\langle \Theta(x)z, y \rangle + \langle [\dot{\Theta}(x) - \Theta(x)A^T(x) - A(x)\Theta(x)]z, z \rangle \geq \\ &\geq 2p\|y\|^2 - 2\|\Theta\|_0\|y\|\|z\| + \|z\|^2 \geq \left(p + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \|\Theta\|_0^2}\right) \cdot (\|y\|^2 + \|z\|^2) \end{aligned}$$

W ten sposób dla wartości parametru $p > 0, 5\|\Theta\|_0^2$ pochodna formy kwadratowej (6.5) względem układu (6.4) jest dodatnio określona, skąd wynika, że układ (6.4) jest regularny, czyli ma jedyną funkcję Greena o postaci

$$\bar{G}_0(\tau, x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \Omega_\tau^0(x) & 0 \\ \omega(0, \tau, x) & (\Omega_0^\tau(x))^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}(x(\tau; x)) & C_{12}(x(\tau; x)) \\ C_{21}(x(\tau; x)) & C_{22}(x(\tau; x)) \end{pmatrix}, & \tau \leq 0, \\ \begin{pmatrix} \Omega_\tau^0(x) & 0 \\ \omega(0, \tau, x) & (\Omega_0^\tau(x))^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}(x(\tau; x)) - I_n & C_{12}(x(\tau; x)) \\ C_{21}(x(\tau; x)) & C_{22}(x(\tau; x)) - I_n \end{pmatrix}, & \tau > 0, \end{cases} \quad (6.6)$$

gdzie

$$\omega(0, \tau, x) = \int_\tau^0 [\Omega_0^{\tau_1}(x)]^T \Omega_{\tau_1}^{\tau_1}(x) d\tau_1.$$

Ponadto, ma miejsce oszacowanie:

$$\|\bar{G}_0(\tau, x)\| \leq K e^{-\gamma|\tau|}, \quad K, \gamma = \text{const} > 0. \quad (6.7)$$

Funkcja (6.6) jest $2n \times 2n$ wymiarową macierzą:

$$\bar{G}_0(\tau, x) = \begin{pmatrix} G_0^{11}(\tau, x) & G_0^{12}(\tau, x) \\ G_0^{21}(\tau, x) & G_0^{22}(\tau, x) \end{pmatrix},$$

której blok

$$G_0^{11}(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x) C_{11}(x(\tau; x)), & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(x) [C_{11}(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases}$$

jest funkcją Greena układu (1.1).

Założmy teraz, że $\det \Theta(x_0) = 0$ dla pewnej wartości $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Pokażemy, że wtedy macierz $C_{12}(x(\tau; x_0))$ nie jest równa tożsamościowo macierzy zerowej. Założmy więc, że ma miejsce tożsamość:

$$C_{12}(x(\tau; x_0)) \equiv 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (6.8)$$

Wtedy ze struktury funkcji Greena (6.6) i (6.7) wynika spełnianie oszacowania:

$$\|G_0^{22}(\tau, x_0)\| \leq K e^{-\gamma|\tau|}, \quad K, \gamma = \text{const} > 0, \quad (6.9)$$

dla funkcji

$$G_0^{22}(\tau, x_0) = \begin{cases} (\Omega_0^\tau(x_0))^T C_{22}(x(\tau; x_0)), & \tau \leq 0, \\ (\Omega_0^\tau(x_0))^T [C_{22}(x(\tau; x_0)) - I_n], & \tau > 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Jeśli teraz rozpatrzmy niejednorodny układ liniowy:

$$\frac{dz}{dt} = -A^T(x(t; x_0))z + h(t), \quad (6.11)$$

to układ ten dla każdej ciągłej i ograniczonej funkcji wektorowej $h(t)$ ma ograniczone na \mathbb{R} rozwiązanie postaci

$$x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_t^{22}(\tau, x_0) h(\tau) d\tau,$$

gdzie

$$G_t^{22}(\tau, x_0) = \begin{cases} (\Omega_t^\tau(x_0))^T C_{22}(x(\tau; x_0)), & \tau \leq t, \\ (\Omega_t^\tau(x_0))^T [C_{22}(x(\tau; x_0)) - I_n], & \tau > t. \end{cases} \quad (6.12)$$

Z drugiej strony niejednorodny układ (6.11) nie może mieć ograniczonego na \mathbb{R} rozwiązania dla każdej ograniczonej funkcji $h(t)$, ponieważ pochodna formy kwadratowej $\langle \Theta(x(t; x_0))z, z \rangle$ względem układu $\frac{dz}{dt} = -A^T(x(t; x_0))z$ jest dodatnio określona i przy tym $\det \Theta(x(t; x_0))|_{t=0} = 0$. W ten sposób tożsamość (6.8) nie zachodzi. Wynika stąd, że układ (1.1) ma rodzinę różnych funkcji Greena:

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x) [C_{11}(x(\tau; x)) + pC_{12}(x(\tau; x))], & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(x) [C_{11}(x(\tau; x)) + pC_{12}(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases}$$

co należało udowodnić.

□

Uwaga 6.1. Jeśli układ (1.1) jest słabo regularny, to istnieje zbiór macierzy $\Theta(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$, dla których zachodzi nierówność (6.3). Pewne z tych macierzy zapisują się w postaci całkowej:

$$\begin{aligned} \Theta(x) = & \int_{-\infty}^0 [\Omega_\tau^0(x)C(x(\tau; x))] \cdot H_1(x(\tau; x)) \cdot [\Omega_\tau^0(x)C(x(\tau; x))]^T d\tau - \\ & - \int_0^{+\infty} \left\{ \Omega_\tau^0(x) [C(x(\tau; x)) - I_n] \right\} \cdot H_2(x(z; x)) \cdot \left\{ \Omega_\tau^0(x) [C(x(\tau; x)) - I_n] \right\}^T d\tau \end{aligned}$$

gdzie $H_1(x), H_2(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ są dowolnymi symetrycznymi macierzami, dla których spełnione są nierówności

$$\langle H_j(x)y, y \rangle \geq 2\|y\|^2, \quad j = 1, 2.$$

Uwaga 6.2. Jeżeli układ (1.1) ma przynajmniej jedną funkcję Greena, to układ poszerzony (6.4) ma dokładnie jedną funkcję Greena (6.6).

Uwaga 6.3. Metodę dobierania nowych równań, które pozwolą doprowadzić układ słabo regularny (1.1) do regularnego (6.4), można także zaobserwować w liniowych układach algebraicznych.

Rozpatrzmy następujący przykład.

PRZYKŁAD 6.1. Należy zapisać w jawnej postaci wszystkie rozwiązania równania liniowego:

$$y_1 \cos x + y_2 \sin x = h(x), \quad (6.13)$$

gdzie $h(x) \in C^0(\mathbb{R})$ jest dowolną ustaloną funkcją ciągłą i ograniczoną na \mathbb{R} .

Przez podobne dopełnienie jak w (6.4), równanie (6.13) dopełnimy do następującego układu równań:

$$\begin{cases} y_1 \cos x + y_2 \sin x = h(x), \\ y_1 - z \cos x = q_1(x), \\ y_2 - z \sin x = q_2(x), \end{cases} \quad (6.14)$$

gdzie $q_1(x), q_2(x)$ są dowolnymi funkcjami ciągłymi i ograniczonymi na \mathbb{R} . Ponieważ w liniowym układzie algebraicznym (6.14) wyznacznik macierzy:

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ 1 & 0 & -\cos x \\ 0 & 1 & -\sin x \end{pmatrix},$$

nie jest równy zero, to liniowy układ algebraiczny (6.14) ma jedyne rozwiązanie dla dowolnych ustalonych $h(x), q_1(x), q_2(x)$. Z drugiego i trzeciego równania układu (6.14) wyznaczamy:

$$y_1 = z \cos x + q_1(x), \quad y_2 = z \sin x + q_2(x), \quad (6.15)$$

i podstawiamy do pierwszego równania układu (6.14). Mamy stąd:

$$z = -q_1(x) \cos x - q_2(x) \sin x + h(x). \quad (6.16)$$

Podstawiając równość (6.16) do (6.15), otrzymujemy rozwiązanie równania (6.13):

$$\begin{cases} y_1 = h(x) \cos x + q_1(x) \sin^2 x - q_2(x) \sin x \cos x, \\ y_2 = h(x) \sin x - q_1(x) \sin x \cos x + q_2(x) \cos^2 x. \end{cases} \quad (6.17)$$

Zauważmy, że równość (6.17) wyznacza wszystkie rozwiązania równania (6.13). Faktycznie, jeśli mamy pewne rozwiązanie $(\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x))$ równania (6.13), to w układzie (6.14) wybieramy $q_1(x) = \tilde{y}_1(x)$, $q_2(x) = \tilde{y}_2(x)$ i przy tym układ ten ma rozwiązanie $y_1 = \tilde{y}_1(x)$, $y_2 = \tilde{y}_2(x)$, $z = 0$ i jest ono jedyne.

Rozpatrzmy teraz układ równań algebraicznych mający postać

$$B(x)y = h(x), \quad (6.18)$$

gdzie $B(x)$ jest pewną prostokątną macierzą:

$$B(x) = \begin{pmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) & \dots & b_{1n}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) & \dots & b_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1}(x) & b_{p2}(x) & \dots & b_{pn}(x) \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

której elementami $b_{ij}(x)$ są rzeczywiste skalarne funkcje określone i ciągłe na \mathbb{R}^m . Załóżmy, że rząd macierzy (6.19) jest tożsamościowo równy liczbie wierszy tej macierzy:

$$\text{rz}B(x) \equiv p, \quad p < n. \quad (6.20)$$

Oczywiście przy spełnieniu warunku (6.20) układ (6.18) ma nieskończenie wiele rozwiązań dla każdej funkcji wektorowej $h(x)$. Nasze zadanie polega na zapisaniu wszystkich tych rozwiązań w jawnej postaci.

Do układu (6.18) dodajmy nowe równania:

$$\begin{cases} B(x)y = h(x), \\ y - B^T(x)z = q(x), \end{cases} \quad (6.21)$$

gdzie $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^p$, $x \in \mathbb{R}^m$, $q(x)$ jest dowolną funkcją wektorową określoną i ciągłą na \mathbb{R}^m . Aby znaleźć zmienne z , z drugiej części układu równań (6.21) wyznaczamy:

$$y = B^T(x)z + q(x), \quad (6.22)$$

i podstawiamy do układu (6.18). Mamy wtedy

$$B(x)(B^T(x)z + q(x)) = h(x).$$

Z warunku (6.20) wynika, że $\det B(x)B^T(x) \neq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^m$. Pozwala to jednoznacznie wyznaczyć zmienną z :

$$\begin{aligned} z &= [B(x)B^T(x)]^{-1} [-B(x)q(x) + h(x)] = \\ &= -[B(x)B^T(x)]^{-1} B(x)q(x) + [B(x)B^T(x)]^{-1} h(x). \end{aligned}$$

Podstawiając to do równości (6.22), otrzymujemy rozwiązanie układu równań (6.18):

$$y = \left\{ I_n - B^T(x) [B(x)B^T(x)]^{-1} B(x) \right\} q(x) + B^T(x) [B(x)B^T(x)]^{-1} h(x). \quad (6.23)$$

Uwaga 6.4. W równości (6.23) macierz

$$I_n - B^T(x) [B(x)B^T(x)]^{-1} B(x) = P(x), \quad (6.24)$$

jest macierzą rzutowania, tzn.

$$P^2(x) \equiv P(x) \quad \text{dla dowolnego } x \in \mathbb{R}^m.$$

Uwaga 6.5. Wszystkie rozwiązania układu równań (6.18) można zapisać w postaci (6.23), dobierając odpowiednio funkcję wektorową $q(x)$.

PRZYKŁAD 6.2. Zapiszmy w jawnej postaci wszystkie rozwiązania równania liniowego:

$$y_1 \cos x_1 \cos x_2 + y_2 \cos x_1 \sin x_2 + y_3 \sin x_1 = 0. \quad (6.25)$$

Macierz $B(x)$ składa się z jednego wiersza:

$$B(x) = (\cos x_1 \cos x_2 \quad \cos x_1 \sin x_2 \quad \sin x_1).$$

Korzystając z macierzy rzutowania (6.24), $B(x)B^T(x) \equiv 1$, mamy:

$$\begin{aligned} I_n - B^T(x) [B(x)B^T(x)]^{-1} B(x) &= I_n - B^T(x)B(x) = \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \cos^2 x_1 \cos^2 x_2) & (-\cos^2 x_1 \cos x_2 \sin x_2) & (-\cos x_1 \sin x_1 \cos x_2) \\ (-\cos^2 x_1 \cos x_2 \sin x_2) & (1 - \cos^2 x_1 \sin^2 x_2) & (-\cos x_1 \sin x_1 \sin x_2) \\ (-\cos x_1 \sin x_1 \cos x_2) & (-\cos x_1 \sin x_1 \sin x_2) & \cos^2 x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

W ten sposób wszystkie rozwiązania równania (6.25) zapisują się w jawnej postaci

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \cos^2 x_1 \cos^2 x_2) & (-\cos^2 x_1 \cos x_2 \sin x_2) & (-\cos x_1 \sin x_1 \cos x_2) \\ (-\cos^2 x_1 \cos x_2 \sin x_2) & (1 - \cos^2 x_1 \sin^2 x_2) & (-\cos x_1 \sin x_1 \sin x_2) \\ (-\cos x_1 \sin x_1 \cos x_2) & (-\cos x_1 \sin x_1 \sin x_2) & \cos^2 x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(x_1, x_2) \\ q_2(x_1, x_2) \\ q_3(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

gdzie $q_1(x_1, x_2)$, $q_2(x_1, x_2)$, $q_3(x_1, x_2)$ są to dowolne funkcje rzeczywiste określone na \mathbb{R}^2 .

Rozpatrzmy teraz przykład układu (6.4).

PRZYKŁAD 6.3. Weźmy pod uwagę następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sin x, & \frac{dy_1}{dt} &= (\cos x)y_1, \\ & & \frac{dy_2}{dt} &= y_1 - (\cos x)y_2. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Zauważmy, że część tego układu:

$$\frac{dx}{dt} = \sin x, \quad \frac{dy_1}{dt} = (\cos x)y_1,$$

ma nieskończenie wiele funkcji Greena, ponieważ pochodna formy kwadratowej $V = -(\cos x)y_2^2$ względem układu sprzężonego:

$$\frac{dx}{dt} = \sin x, \quad \frac{dy_2}{dt} = -(\cos x)y_2,$$

jest dodatnio określona, przy czym forma ta zależy od jednej zmiennej y_2 ze współczynnikiem $-\cos x$, który może się zerować. Faktycznie, obliczając tą pochodną, mamy:

$$\dot{V} = (\sin x)\dot{x}y_2^2 - (\cos x)2y_2\dot{y}_2 = (\sin^2 x + 2\cos^2 x)y_2^2 \geq y_2^2.$$

Obliczając teraz pochodną formy kwadratowej

$$V = 2y_1y_2 - (\cos x)y_2^2, \quad (6.27)$$

względem układu (6.26), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2(\cos x)y_1y_2 + 2y_1(y_1 - y_2\cos x) + (\sin^2 x)y_2^2 - 2(\cos x)(y_1 - y_2\cos x)y_2 = \\ &= 2y_1^2 - 2y_1y_2\cos x + (\sin^2 x + 2\cos^2 x)y_2^2 \geq \\ &\geq 2y_1^2 - y_1^2 - y_2^2\cos^2 x + (\sin^2 x + 2\cos^2 x)y_2^2 = y_1^2 + y_2^2. \end{aligned}$$

Ponieważ forma kwadratowa (6.27) jest niezdegenerowana, tzn.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\cos x \end{pmatrix} \neq 0,$$

to układ (6.26) ma jedyną funkcję Greena.

O tym, że układ (6.26) ma jedyną funkcję Greena, można się przekonać także inną metodą. Mianowicie, w układzie (6.26) zrobmy zamianę zmiennych:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos x & 1 - \cos x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = L(x)z. \quad (6.28)$$

Zapiszmy teraz macierz odwrotną:

$$L^{-1}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \cos x \\ 1 & -(1 + \cos x) \end{pmatrix},$$

i przeprowadźmy następujące obliczenia:

$$\begin{aligned} L^{-1} [AL - \dot{L}] &= \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \cos x \\ 1 & -(1 + \cos x) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 1 & -\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \cos x & 1 - \cos x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sin^2 x & \sin^2 x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

W ten sposób po zamianie zmiennych (6.28) układ (6.26) przyjmie postać:

$$\frac{dx}{dt} = \sin x, \quad \frac{dz_1}{dt} = z_1, \quad \frac{dz_2}{dt} = -z_2.$$

Oczywiście otrzymany układ ma jedyną funkcję Greena, a co oznacza, że układ (6.26) również ma jedyną funkcję Greena.

Wartym uwagi jest następujący przykład.

PRZYKŁAD 6.4. Zbadajmy regularność następującego układu:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2, \\ \frac{dy_1}{dt} = (p_1 \cos p_0 x + p_2 \sin p_0 x)y_1 + (-p_2 \cos p_0 x + p_1 \sin p_0 x - p_0)y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = (-p_2 \cos p_0 x + p_1 \sin p_0 x + p_0)y_1 - (p_1 \cos p_0 x + p_2 \sin p_0 x)y_2. \end{cases} \quad (6.29)$$

gdzie p_0, p_1, p_2 to rzeczywiste parametry, dla których zachodzą warunki:

$$p_1 \neq 0, \quad p_2 \neq 0, \quad p_0 > 0, \quad p_0^2 = p_1^2 + p_2^2. \quad (6.30)$$

Zauważmy, że wyznacznik macierzy

$$A(x) = \begin{pmatrix} (p_1 \cos p_0 x + p_2 \sin p_0 x) & (-p_2 \cos p_0 x + p_1 \sin p_0 x - p_0) \\ (-p_2 \cos p_0 x + p_1 \sin p_0 x + p_0) & -(p_1 \cos p_0 x + p_2 \sin p_0 x) \end{pmatrix}, \quad (6.31)$$

która odpowiada układowi (6.29), nie zależy od zmiennej x , tzn. $\det A(x) = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2$, a przy spełnianiu równości (6.30) mamy, że $\det A(x) \equiv 0$.

Sprawdźmy, że układ (6.29) przy zachodzeniu warunków (6.30) jest regularny, czyli ma jedyną funkcję Greena. Zrobimy to dwoma sposobami.

1. Pochodna względem układu (6.29) formy kwadratowej:

$$V = y_1^2 \cos p_0 x + 2y_1 y_2 \sin p_0 x - y_2^2 \cos p_0 x, \quad (6.32)$$

jest określonego znaku. Obliczając tą pochodną, mamy:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2y_1\dot{y}_1 \cos p_0x - y_1^2 p_0 \dot{x} \sin p_0x + 2\dot{y}_1 y_2 \sin p_0x + 2y_1 \dot{y}_2 \sin p_0x + 2y_1 y_2 p_0 \dot{x} \cos p_0x + \\
&\quad - 2y_2 \dot{y}_2 \cos p_0x + y_2^2 p_0 \dot{x} \sin p_0x = \\
&= 2y_1 [(p_1 \cos p_0x + p_2 \sin p_0x)y_1 + (-p_2 \cos p_0x + p_1 \sin p_0x - p_0)y_2] \cos p_0x + \\
&\quad - 2y_1^2 p_0 \sin p_0x + \\
&\quad + 2 [(p_1 \cos p_0x + p_2 \sin p_0x)y_1 + (-p_2 \cos p_0x + p_1 \sin p_0x - p_0)y_2] y_2 \sin p_0x + \\
&\quad + 2y_1 [(-p_2 \cos p_0x + p_1 \sin p_0x + p_0)y_1 - (p_1 \cos p_0x + p_2 \sin p_0x)y_2] \sin p_0x + \\
&\quad + 4y_1 y_2 p_0 \cos p_0x - \\
&\quad - 2y_2 [(-p_2 \cos p_0x + p_1 \sin p_0x + p_0)y_1 - (p_1 \cos p_0x + p_2 \sin p_0x)y_2] \cos p_0x + \\
&\quad + 2y_2^2 p_0 \sin p_0x = \\
&= 2p_1(y_1^2 + y_2^2).
\end{aligned}$$

W ten sposób dla $p_1 > 0$ pochodna formy kwadratowej (6.32) będzie dodatnio określona, a dla $p_1 < 0$ będzie ujemnie określona. Ponieważ forma kwadratowa (6.32) jest niezdegenerowana:

$$\det \begin{pmatrix} \cos p_0x & \sin p_0x \\ \sin p_0x & -\cos p_0x \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$$

to układ (6.29) jest regularny.

2. W układzie (6.29) dokonajmy zamiany zmiennych:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{p_0x}{2} & \sin \frac{p_0x}{2} \\ \sin \frac{p_0x}{2} & -\cos \frac{p_0x}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Oznaczmy

$$p_0x = \varphi, \quad \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & \sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & -\cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} = L,$$

i obliczmy macierz $L^{-1}(AL - \dot{L}) = B$. Zauważmy, że $L = L^{-1}$. Pochodna \dot{L} ma zatem postać:

$$\dot{L} = p_0 \begin{pmatrix} -\sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} & \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

Kontynuując obliczenia, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
L^{-1}(AL - \dot{L}) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & \sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & -\cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p_1 \cos \frac{\varphi}{2} + p_2 \sin \frac{\varphi}{2}) & (p_2 \cos \frac{\varphi}{2} - p_1 \sin \frac{\varphi}{2}) \\ (-p_2 \cos \frac{\varphi}{2} + p_1 \sin \frac{\varphi}{2}) & (p_1 \cos \frac{\varphi}{2} + p_2 \sin \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & -p_1 \end{pmatrix} = B.
\end{aligned}$$

W ten sposób po zamianie zmiennych (6.33) układ (6.29) przyjmuje postać:

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dz_1}{dt} = p_1 z_1 + p_2 z_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = p_2 z_1 - p_1 z_2. \quad (6.34)$$

W otrzymanym układzie wartości własne stałej macierzy B są rzeczywiste i różne od zera, co oznacza, że układ (6.34), a razem z nim także układ (6.29), jest regularny.

Kontynuując badanie układu (6.29), zauważmy, że układ (6.34) można jeszcze uprościć, wprowadzając następującą zamianę zmiennych:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_0 + p_1) & -p_2 \\ p_2 & (p_0 + p_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = T \cdot r \quad (6.35)$$

Wówczas układ (6.34) przyjmie następującą postać:

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dr_1}{dt} = p_0 r_1, \quad \frac{dr_2}{dt} = -p_0 r_2, \quad (6.36)$$

dla której łatwo zapisać funkcję Greena zadania o ograniczonej rozmaitości:

$$G_0(\tau) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{p_0 \tau}, & \tau \leq 0, \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-p_0 \tau}, & \tau > 0. \end{cases} \quad (6.37)$$

W ten sposób niejednorodny układ:

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dr_1}{dt} = p_0 r_1 + \bar{h}_1(x), \quad \frac{dr_2}{dt} = -p_0 r_2 + \bar{h}_2(x),$$

dla dowolnych ustalonych funkcjach $\bar{h}_j(x) \in C^0(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$, ma jedyną ograniczoną na \mathbb{R} inwariantną rozmaitość:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau) \begin{pmatrix} \bar{h}_1(2\tau + x) \\ \bar{h}_2(2\tau + x) \end{pmatrix} d\tau.$$

Jeśli teraz rozpatrzmy układ (6.29) z dołączonymi funkcjami $h_j(x) \in C^0(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2, \\ \frac{dy_1}{dt} = (p_1 \cos p_0 x + p_2 \sin p_0 x) y_1 + (-p_2 \cos p_0 x + p_1 \sin p_0 x - p_0) y_2 + h_1(x), \\ \frac{dy_2}{dt} = (-p_2 \cos p_0 x + p_1 \sin p_0 x + p_0) y_1 - (p_1 \cos p_0 x + p_2 \sin p_0 x) y_2 + h_2(x), \end{cases} \quad (6.38)$$

to układ ten przy założeniu, że spełnione są warunki (6.30) ma jedyną ograniczoną inwariantną rozmaitość dla dowolnych ustalonych $h_j(x) \in C^0(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$, i rozmaitość tą można zapisać w postaci całkowej:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_1(x) \end{pmatrix} = L(x) T \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau) T^{-1} L^{-1}(2\tau + x) \begin{pmatrix} h_1(2\tau + x) \\ h_2(2\tau + x) \end{pmatrix} d\tau, \quad (6.39)$$

przy tym łatwo można obliczyć następujące iloczyny macierzy:

$$L(x)T = \begin{pmatrix} \left[(p_0 + p_1) \cos \frac{p_0 x}{2} + p_2 \sin \frac{p_0 x}{2} \right] & \left[-p_2 \cos \frac{p_0 x}{2} + (p_0 + p_1) \sin \frac{p_0 x}{2} \right] \\ \left[-p_2 \cos \frac{p_0 x}{2} + (p_0 + p_1) \sin \frac{p_0 x}{2} \right] & - \left[(p_0 + p_1) \cos \frac{p_0 x}{2} + p_2 \sin \frac{p_0 x}{2} \right] \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}L(2\tau + x) = \frac{1}{2p_0(p_0 + p_1)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \left[(p_0 + p_1) \cos p_0(\tau + \frac{x}{2}) + p_2 \sin p_0(\tau + \frac{x}{2}) \right] & \left[-p_2 \cos p_0(\tau + \frac{x}{2}) + (p_0 + p_1) \sin p_0(\tau + \frac{x}{2}) \right] \\ \left[-p_2 \cos p_0(\tau + \frac{x}{2}) + (p_0 + p_1) \sin p_0(\tau + \frac{x}{2}) \right] & \left[-(p_0 + p_1) \cos p_0(\tau + \frac{x}{2}) - p_2 \sin p_0(\tau + \frac{x}{2}) \right] \end{pmatrix}$$

Ponieważ przy warunkach (6.30) wyznacznik macierzy (6.31) jest tożsamościowo równy zeru, to wiersze tej macierzy są liniowo zależne. Korzystając z tego, w układzie (6.38) pomnożmy drugie równanie przez $(p_2 \cos p_0 x - p_1 \sin p_0 x - p_0)$, a trzecie przez $(p_1 \cos p_0 x + p_2 \sin p_0 x)$, i dodajmy. Otrzymujemy wtedy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2, \\ \left(\frac{dy_1}{dt} - h_1(x) \right) (p_2 \cos p_0 x - p_1 \sin p_0 x - p_0) + \left(\frac{dy_2}{dt} - h_2(x) \right) (p_1 \cos p_0 x + p_2 \sin p_0 x) = 0. \end{cases} \quad (6.40)$$

Stosując zwykłe przekształcenia i wprowadzając oznaczenia:

$$p_2 \cos p_0 x - p_1 \sin p_0 x - p_0 = p_0 [\cos(p_0 x + \psi) - 1] = -2p_0 \sin^2 \frac{p_0 x + \psi}{2},$$

$$p_1 \cos p_0 x + p_2 \sin p_0 x = p_0 \sin(p_0 x + \psi) = 2p_0 \sin \frac{p_0 x + \psi}{2} \cos \frac{p_0 x + \psi}{2}$$

$$\cos \psi = \frac{p_2}{p_0}, \quad \sin \psi = \frac{p_1}{p_0}, \quad \bar{x} = -\frac{p_0 x + \psi}{2}, \quad \bar{h}_j(\bar{x}) = h_j\left(-\frac{2\bar{x} + \psi}{p_0}\right), \quad j = 1, 2,$$

układ (6.40) przejdzie w równoważny układ mający postać:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = -p_0, \\ \left(\frac{dy_1}{dt} - \bar{h}_1(\bar{x}) \right) \sin \bar{x} + \left(\frac{dy_2}{dt} - \bar{h}_2(\bar{x}) \right) \cos \bar{x} = 0. \end{cases}$$

Z innej, jeżeli oznaczymy

$$\tilde{x} = \frac{p_0 x + \psi}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad \tilde{h}_j(\tilde{x}) = h_j\left(\frac{2\tilde{x} - \psi - \pi}{p_0}\right),$$

to wtedy układ (6.40) przyjmie postać równoważnego układu postaci

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = p_0, \\ \left(\frac{dy_1}{dt} - \tilde{h}_1(\tilde{x}) \right) \cos \tilde{x} + \left(\frac{dy_2}{dt} - \tilde{h}_2(\tilde{x}) \right) \sin \tilde{x} = 0. \end{cases}$$

W ten sposób układ (6.40) sprowadza się do układu w postaci:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \left(\frac{dy_1}{dt} - h_1(x) \right) \cos x + \left(\frac{dy_2}{dt} - h_2(x) \right) \sin x = 0. \end{cases} \quad (6.41)$$

Zauważmy, że wyjaśnienie zagadnienia istnienia ograniczonej inwariantnej rozmaitości: $(y_1, y_2) = (u_1(x), u_2(x))$ układu (6.40) dla dowolnych ustalonych funkcji $h_j(x) \in C^0(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$, jest równoważne zagadnieniu istnienia inwariantnej rozmaitości układu (6.41) dla dowolnych ustalonych funkcjach $h_j(x) \in C^0(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$.

Proponujemy Czytelnikowi samodzielnie zbadać istnienie funkcji Greena dla następujących układów.

1. $\frac{dx}{dt} = 1, \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 \operatorname{tgh} x, \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2 \operatorname{tgh} x. \end{cases}$
2. $\frac{dx}{dt} = 1, \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 \operatorname{tgh} x, \\ \frac{dy_2}{dt} = b(x)y_1 + y_2 \operatorname{tgh} x, \end{cases} \quad b(x) = \frac{-x^2 + x - 1}{(x + 1)^2 + 1}.$
3. $\frac{dx}{dt} = 1, \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \\ \frac{dy_2}{dt} = -5y_1 + y_2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x. \end{cases}$
4. $\frac{dx}{dt} = \cos x, \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\lambda(\sin x)y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = 0, 1y_1 + \lambda(\sin x)y_2, \end{cases} \quad \lambda = \operatorname{const} > 0.$
5. $\frac{dx}{dt} = \sin 2x, \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1 \cos 2x, \\ \frac{dy_2}{dt} = b(x)y_1 - y_2 \cos 2x, \end{cases} \quad b(x) = \cos^4 x + \sin^6 x - 0, 24.$

Znaleźć ograniczone inwariantne rozmaitości następujących układów równań.

1. $\frac{dx}{dt} = 1, \quad \left(\frac{dy_1}{dt} - 1\right) \cos x + \left(\frac{dy_2}{dt} - 2\right) \sin x = 0.$
2. $\frac{dx}{dt} = 1, \quad \left(\frac{dy_1}{dt} - A\right) \cos x + \left(\frac{dy_2}{dt} - B\right) \sin x = 0, \quad A, B = \operatorname{const}.$
3. $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 1, & \frac{dx_2}{dt} = \omega, \quad \omega = \operatorname{const} > 0, \\ \left(\frac{dy_1}{dt} - 1\right) \cos x_1 \cos x_2 + \left(\frac{dy_2}{dt} - 2\right) \cos x_1 \sin x_2 + \left(\frac{dy_3}{dt} - 3\right) \sin x_1 = 0. \end{cases}$

4.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 1, & \frac{dx_2}{dt} = 2, & A, B, C = \text{const}, \\ \left(\frac{dy_1}{dt} - A\right) \cos x_1 \cos x_2 + \left(\frac{dy_2}{dt} - B\right) \cos x_1 \sin x_2 + \left(\frac{dy_3}{dt} - C\right) \sin x_1 = 0. \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 1, & \frac{dx_2}{dt} = 2, \\ \frac{dy_1}{dt} \cos x_1 \cos x_2 + \frac{dy_2}{dt} \sin x_1 \cos x_2 + \frac{dy_3}{dt} \sin x_2 = \sum_{j=1}^3 y_j b_j(x_1, x_2) + h(x_1, x_2), \end{cases}$$

$$b_1(x_1, x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2, \quad b_2(x_1, x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_2,$$

$$b_3(x_1, x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \cos x_2, \quad h(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2).$$

7. Pewne uogólnienia metody dopełnienia słabo regularnych liniowych rozszerzeń do regularnych

Zwróćmy uwagę na to, że układ (6.4) w postaci blokowo trójkątnej przy zmiennych normalnych y, z można uogólnić w następujący sposób:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y + B_2(x)z, \quad \frac{dz}{dt} = B_1(x)y - A^T(x)z, \quad (7.1)$$

gdzie $n \times n$ wymiarowe macierze $B_1(x), B_2(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ spełniają warunki:

$$\langle B_1(x)y, y \rangle \geq \beta_1 \|y\|^2, \quad \beta_1 = \text{const} > 0, \quad (7.2)$$

$$\langle B_2(x)y, y \rangle \geq 0. \quad (7.3)$$

W szczególnym przypadku kiedy $B_2(x) \equiv 0$, $B_1(x) \equiv I_n$, układ (7.1) przyjmuje postać (6.4). Przy tym, podobnie jak wcześniej, pochodna formy kwadratowej (6.5) względem układu (7.1) również będzie dodatnio określona dla dostatecznie dużych wartości parametru $p > 0$.

Uwaga 7.1. Jeśli w układzie (7.1) dla macierzy $B_1(x), B_2(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ założyc spełnianie warunków (7.2) i (7.3), przy czym wzmocnić warunek (7.3) w postaci

$$\langle B_2(x)y, y \rangle \geq \beta_2 \|y\|^2, \quad \beta_2 = \text{const} > 0, \quad (7.4)$$

to układ (7.1) będzie regularny dla dowolnej macierzy $A(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$.

Faktycznie, łatwo sprawdzić, że pochodna niezdegenerowanej formy kwadratowej $V = \langle y, z \rangle$ względem układu (7.1) jest dodatnio określona:

$$\dot{V} = \langle B_1 y, y \rangle + \langle B_2 z, z \rangle, \quad (7.5)$$

dla dowolnej macierzy $A(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$. Można tutaj porównać układ (7.1) z wcześniej rozpatrywanym układem (2.37).

Zauważmy dalej, że układ (7.1) można zapisać w następującej postaci:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -A^T(x) \\ A(x) & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Wtedy pochodna formy kwadratowej

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle,$$

względem układu (7.6) będzie równa:

$$\dot{V} = 2 \left\langle \left(\begin{array}{cc} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{array} \right) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (7.7)$$

W ten sposób, jeśli macierz $B(x) = \text{diag} \{B_1(x), B_2(x)\}$ jest dodatnio określona albo ujemnie określona, to układ (7.6) będzie regularny dla dowolnej macierzy $A(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$.

Zmieniając oznaczenia: $y \rightarrow y_1$, $z \rightarrow y_2$, układ (7.7) zapiszmy w bardziej ogólnej postaci:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S \frac{dy}{dt} = [B(x) + M(x)] y, \quad (7.8)$$

gdzie S jest stałą symetryczną macierzą **niezdegenerowaną**, $M(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ jest skończone symetryczną macierzą, tzn.

$$M^T(x) \equiv -M(x), \quad (7.9)$$

a macierz $B(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ można uważać za symetryczną, ponieważ w przeciwnym przypadku zawsze można wydzielić część symetryczną:

$$B(x) = \frac{1}{2}(B(x) + B^T(x)) + \frac{1}{2}(B(x) - B^T(x)).$$

W szczególnym przypadku jeśli założyć, że w układzie (7.8) liczba zmiennych $y = (y_1, y_2)$, $y_j \in \mathbb{R}^n$ jest parzysta i macierze S , $B(x)$, $M(x)$ mają następującą postać:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{pmatrix}, \quad M(x) = \begin{pmatrix} 0 & -A^T(x) \\ A(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

to otrzymujemy poprzedni układ (7.6).

Rozpatrując układ (7.8) niezależnie, niekoniecznie z macierzami w postaci (7.10) i parzystą liczbą zmiennych y , łatwo można zauważyć, że pochodna formy kwadratowej $V = \langle Sy, y \rangle$ względem układu (7.8) ma postać:

$$\dot{V} = 2 \langle B(x)y, y \rangle. \quad (7.11)$$

Wynika stąd następujące twierdzenie.

Wniosek 7.1. *Jeśli w układzie (7.8) symetryczna macierz $B(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ jest dodatnio określona: $\langle B(x)y, y \rangle \geq \beta \|y\|^2$, $\beta = \text{const} > 0$, to dla dowolnej macierzy $M(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$, dla której zachodzi warunek (7.9), układ (7.8) będzie regularny.*

Próbując dalej uogólnić układ (7.8), zamieńmy stałą macierz S na zmienną $S(x)$ i założmy, że $S^T(x) \equiv S(x) \in C^1(\mathbb{R}^m; f)$, $\det S(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$. Wtedy dla formy kwadratowej $V = \langle S(x)y, y \rangle$ już nie będzie zachodziła równość (7.11). Aby tak było, potrzebujemy nieznacznie zmienić postać układu (7.8). Rozpatrzmy zatem następujący układ:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S(x) \frac{dy}{dt} = \left[B(x) + M(x) - \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right] y. \quad (7.12)$$

Teraz pochodna niezdegenerowanej formy kwadratowej $V = \langle S(x)y, y \rangle$ względem układu (7.12) będzie spełniać równość (7.11).

Układ (7.12) można otrzymać na drodze następującego rozważania. Załóżmy, że istnieje forma kwadratowa $V = \langle S(x)y, y \rangle$ z symetryczną macierzą współczynników $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$, której pochodna względem układu (1.1) jest dodatnio określona, czyli spełniona jest nierówność (5.1) i przy tym $\det S(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Wówczas układ (1.1) jest równoważny następującemu układowi

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S(x) \frac{dy}{dt} = S(x)A(x)y,$$

który z kolei jest równoważny układowi:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S(x) \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} \dot{S}(x)y = \left[S(x)A(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right] y. \quad (7.13)$$

Teraz w otrzymanym układzie (7.13) macierz

$$\bar{A}(x) = S(x)A(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x),$$

symetryzujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \bar{A}(x) &= \frac{1}{2}(\bar{A}(x) + \bar{A}^T(x)) + \frac{1}{2}(\bar{A}(x) - \bar{A}^T(x)) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[S(x)A(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right] + \left[S(x)A(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right]^T \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left[S(x)A(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right] - \left[S(x)A(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right]^T \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ S(x)A(x) + A^T(x)S(x) + \dot{S}(x) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ S(x)A(x) - A^T(x)S(x) \right\}. \end{aligned}$$

Oznaczając

$$B(x) = \frac{1}{2} \left\{ S(x)A(x) + A^T(x)S(x) + \dot{S}(x) \right\}, \quad (7.14)$$

$$M(x) = \frac{1}{2} \left\{ S(x)A(x) - A^T(x)S(x) \right\}, \quad (7.15)$$

układ (7.13) zapisuje się w postaci:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S(x) \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} \dot{S}(x)y = [B(x) + M(x)]y, \quad (7.16)$$

gdzie macierz $B(x)$ o postaci (7.14) jest symetryczna i dodatnio określona, a macierz $M(x)$ o postaci (7.15) jest skośnie symetryczna. Przenosząc w układzie (7.16) składnik $\frac{1}{2} \dot{S}(x)y$ na prawą stronę, otrzymujemy układ (7.12).

W dalszym ciągu układ (7.12) będziemy rozpatrywać jako niezależny z pewną symetryczną macierzą $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$, która spełnia warunki:

$$\det S(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \|S^{-1}(x)\| \leq \text{const} < \infty, \quad (7.17)$$

gdzie $f(x) \in C_{\text{Lip}}(\mathbb{R}^m)$.

Z równości (7.11) dla niezdegenerowanej formy kwadratowej V wynika następujący wniosek.

Wniosek 7.2. Jeżeli w układzie (7.12) symetryczna macierz $B(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ jest dodatnio określona, tzn.

$$\langle B(x)y, y \rangle \geq \beta \|y\|^2, \quad \beta = \text{const} > 0,$$

albo ujemnie określona:

$$\langle B(x)y, y \rangle \leq -\beta \|y\|^2, \quad \beta = \text{const} > 0,$$

to dla dowolnej skośnie symetrycznej macierzy $M(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$, układ (7.12) będzie regularny.

Aby dokładniej wyjaśnić zagadnienie regularności układu (7.12), rozpatrzmy następujące twierdzenie pomocnicze.

Lemat 7.1. Załóżmy, że pewna $n \times n$ wymiarowa macierz **symetryczna** $B(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ spełnia nierówność:

$$\langle B(x)y, y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^m. \quad (7.18)$$

Wówczas, dla **każdej** ustalonej $n \times n$ wymiarowej macierzy $\Psi(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ (niekoniecznie symetrycznej) istnieje **zawsze** dostatecznie duża wartość parametru $p > 0$, dla której forma kwadratowa

$$V = \|y\|^2 + p\langle B(x)y, y \rangle + \langle B(x)y, \Psi(x)y \rangle, \quad (7.19)$$

jest określona dodatnio.

DOWÓD. Rozpatrzmy pomocniczą formę kwadratową mającą postać

$$\Phi_p = \|y\|^2 + p\langle B(x)y, y \rangle + 2\langle B(x)y, \Psi(x)z \rangle + \|z\|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (7.20)$$

Pokażemy, że forma ta będzie dodatnio określona dla dostatecznie dużych wartości parametru $p > 0$. W tym celu zapiszmy ją w postaci:

$$\begin{aligned} \Phi_p &= \langle (I_n + pB(x))y, y \rangle + 2\langle \Psi^T(x)B(x)y, z \rangle + \|z\|^2 = \\ &= \langle \Gamma_p(y + Kz), (y + Kz) \rangle + \|z\|^2 - \langle \Gamma_p Kz, Kz \rangle, \end{aligned} \quad (7.21)$$

gdzie oznaczyliśmy

$$\Gamma_p = I_n + pB(x), \quad K = \Gamma_p^{-1}B(x)\Psi(x). \quad (7.22)$$

Z równości (7.21) łatwo otrzymujemy oszacowanie

$$\Phi_p \geq \|y + Kz\|^2 + (1 - \|K^T \Gamma_p K\|_0) \|z\|^2.$$

Wynika stąd, że dla dodatniej określoności formy kwadratowej (7.20) wystarczy wykazać, że ma miejsce nierówność

$$\|K^T \Gamma_p K\|_0 < 1, \quad (7.23)$$

dla dostatecznie dużych wartości parametru $p > 0$.

Przypomnijmy, że

$$\|K^T \Gamma_p K\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \|K^T(x) \Gamma_p(x) K(x)\|.$$

Na podstawie oznaczeń (7.22), mamy:

$$K^T \Gamma_p K = \Psi^T(x) B(x) \Gamma_p^{-1}(x) B(x) \Psi(x). \quad (7.24)$$

Pokażemy, że dla dowolnych wartości parametru $p > 0$ ma miejsce oszacowanie:

$$\|\Gamma_p^{-1} B\|_0 \leq \frac{1}{p} \quad (7.25)$$

W tym celu ustalmy dowolną wartość $x = x_0 \in \mathbb{R}^m$ i sprowadzimy symetryczną macierz $B(x_0) = B$ do postaci diagonalnej:

$$Q^{-1} B Q = \text{diag} \{ \beta_1, \dots, \beta_n \}, \quad (7.26)$$

gdzie Q jest ortogonalną macierzą: $Q^T = Q^{-1}$. Z nierówności (7.18) wynika, że $\beta_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$. Teraz, na podstawie (7.26), iloczyn macierzy $\Gamma_p^{-1} B$ zapiszemy w następującej formie:

$$\begin{aligned} \Gamma_p^{-1} B &= \frac{1}{p} (I_n + pB)^{-1} (pB) = \\ &= \frac{1}{p} Q \text{diag} \left\{ \frac{1}{1 + p\beta_1}, \dots, \frac{1}{1 + p\beta_n} \right\} Q^{-1} \cdot Q \text{diag} \{ p\beta_1, \dots, p\beta_n \} Q^{-1} = \\ &= \frac{1}{p} Q \text{diag} \left\{ \frac{p\beta_1}{1 + p\beta_1}, \dots, \frac{p\beta_n}{1 + p\beta_n} \right\} Q^{-1}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Ponieważ macierz Q jest ortogonalna, więc $\|Q\| = \|Q^{-1}\| = 1$. Z nierówności (7.27) otrzymujemy wtedy, że ma miejsce oszacowanie

$$\|\Gamma_p^{-1} B\| \leq \frac{1}{p} \left\| \text{diag} \left\{ \frac{p\beta_1}{1 + p\beta_1}, \dots, \frac{p\beta_n}{1 + p\beta_n} \right\} \right\| < \frac{1}{p}. \quad (7.28)$$

Zmieniając wcześniej dowolnie ustaloną wartość $x = x_0 \in \mathbb{R}^m$, dostajemy oszacowanie (7.25).

Uwzględniając to, że $\beta_j \geq 0$, z równości (7.24) i nierówności (7.28) otrzymujemy:

$$\|K^T \Gamma_p K\| \leq \|\Psi^T(x)\| \|B(x)\| \|\Gamma_p^{-1}(x) B(x)\| \|\Psi(x)\| \leq \frac{1}{p} \|\Psi\|_0^2 \|B\|_0.$$

Widać stąd, że wybierając wartość parametru $p \geq 2\|\Psi\|_0^2 \|B\|_0$, otrzymamy

$$\|K^T \Gamma_p K\|_0 \leq \frac{1}{2},$$

co oznacza, że będzie zachodziła nierówność (7.23) i przy tym forma kwadratowa (7.20) jest dodatnio określona:

$$\Phi_p = \|y\|^2 + p\langle B(x)y, y \rangle + 2\langle B(x)y, \Psi(x)z \rangle + \|z\|^2 \geq \varepsilon(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Podstawiając do otrzymanej nierówności $x = y$, dostajemy:

$$2\|y\|^2 + p\langle B(x)y, y \rangle + 2\langle B(x)y, \Psi(x)y \rangle \geq 2\varepsilon\|y\|^2, \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Zmieniając oznaczenia: $p \rightarrow 2p$, wnioskujemy o dodatniej określoności formy kwadratowej (7.19). □

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.1. *Załóżmy, że układ równań*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S(x) \frac{dy}{dt} = \left[M(x) - \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right] y, \quad (7.29)$$

*dla pewnej niezdegenerowanej symetrycznej macierzy $S(x) \in C'(\mathbb{R}^m; f)$ i skośnie symetrycznej macierzy $M(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$, jest słabo regularny. Wtedy układ ten musi być regularny, wymiar $n = 2n_1$ jest parzysty i układ równań (7.12) dla dowolnej **symetrycznej** macierzy $B(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$, która spełnia warunki (7.18), jest regularny.*

DOWÓD. Oznaczmy

$$N(x) = S^{-1}(x) \left[M(x) - \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right]. \quad (7.30)$$

Ponieważ układ (7.29) jest słabo regularny, więc istnieje forma kwadratowa $\langle \Theta(x)z, z \rangle = V$, której pochodna względem układu sprzężonego do układu (7.29):

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dz}{dt} = -N^T(x)z, \quad (7.31)$$

jest dodatnio określona, czyli

$$\dot{V} = \left\langle \left[\dot{\Theta}(x) - \Theta(x)N^T(x) - N(x)\Theta(x) \right] z, z \right\rangle \geq \|z\|^2. \quad (7.32)$$

Sprawdźmy teraz, że pochodna formy kwadratowej

$$\langle S(x)\Theta(x)S(x)y, y \rangle = W, \quad (7.33)$$

względem układu (7.29) będzie także dodatnio określona. W tym celu w nierówności (7.32) dokonajmy zamiany zmiennych: $z = S(x)y$. Korzystając z oznaczenia (7.30), zapiszmy równości:

$$\begin{aligned} S \left\{ \dot{\Theta} - \Theta N^T - N \Theta \right\} S &= S \left\{ \dot{\Theta} + \Theta \left[M + \frac{1}{2} \dot{S} \right] S^{-1} + S^{-1} \left[-M + \frac{1}{2} \dot{S} \right] \Theta \right\} S = \\ &= S \dot{\Theta} S + \frac{1}{2} S \Theta \dot{S} + \frac{1}{2} \dot{S} \Theta S + S \Theta M - M \Theta S = \\ &= S \dot{\Theta} S + \dot{S} \Theta S + S \Theta \dot{S} - \frac{1}{2} S \Theta \dot{S} - \frac{1}{2} \dot{S} \Theta S + S \Theta M - M \Theta S = \\ &= \dot{S} \Theta S + S \dot{\Theta} S + S \Theta \dot{S} + S \Theta S \left\{ S^{-1} \left[M - \frac{1}{2} \dot{S} \right] \right\} + \left\{ S^{-1} \left[M - \frac{1}{2} \dot{S} \right] \right\}^T S \Theta S. \end{aligned}$$

Widać stąd, że pochodna formy kwadratowej (7.33) względem układu (7.29) jest dodatnio określona:

$$\dot{W} \geq \|S(x)y\|^2 \geq \frac{1}{\|S^{-1}\|_0^2} \|y\|^2 = \varepsilon_0 \|y\|^2.$$

W ten sposób istnienie dwóch takich form kwadratowych V i W prowadzi do tego, że $\det \Theta(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^m$ i obydwa układy (7.29) i (7.31) są regularne.

Pokażemy teraz, że w układzie regularnym (7.29) wymiar n musi być parzysty. Jeśli układ (7.29) jest regularny, to odpowiedni układ liniowy:

$$\frac{dy}{dt} = N(x(t; x))y, \quad (7.34)$$

jest eksponencjalnie dychotomiczny na \mathbb{R} . Załóżmy, że układ (7.34) ma r liniowo niezależnych rozwiązań, które dążą do zera dla $t \rightarrow +\infty$ i $n - r$ liniowo niezależnych rozwiązań, które dążą do zera dla $t \rightarrow -\infty$. Wówczas układ sprzężony:

$$\frac{dz}{dt} = -N^T(x(t; x))z, \quad (7.35)$$

powinien mieć r liniowo niezależnych rozwiązań dążących do zera dla $t \rightarrow -\infty$ i $n - r$ liniowo niezależnych rozwiązań dążących do zera dla $t \rightarrow +\infty$. Z drugiej strony, korzystając z oznaczenia (7.30) i własności macierzy $M(x)$, wnioskujemy, że rozwiązania układów (7.34) i (7.35) są związane tożsamością: $S(x(t; x)) \cdot y(t) \equiv z(t)$. Oznacza to, że obydwa układy (7.34) i (7.35) mają jednakową liczbę liniowo niezależnych rozwiązań dążących do zera dla $t \rightarrow +\infty$. W ten sposób $n - r = r$, a stąd $n = 2r$ jest parzyste.

Aby udowodnić regularność układu (7.12) dla dowolnych **symetrycznych** macierzy $B(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$, które spełniają warunek (7.18), rozpatrzmy formę kwadratową z dodatnim parametrem p , mającą postać

$$V_p = p\langle S(x)y, y \rangle + \langle S(x)\Theta(x)S(x)y, y \rangle. \quad (7.36)$$

Pokażemy, że pochodna tej formy względem układu (7.12) dla dostatecznie dużych wartości parametru $p > 0$ jest dodatnio określona. Oznaczając $\Theta_1(x) = S(x)\Theta(x)S(x)$ i korzystając z (7.30), obliczmy pochodną:

$$\begin{aligned} \dot{V}_p &= 2p\langle B(x)y, y \rangle + \\ &+ \left\langle \left[\dot{\Theta}_1(x) + \Theta_1(x)(S^{-1}(x)B(x) + N(x)) + (B(x)S^{-1}(x) + N^T(x))\Theta_1(x) \right] y, y \right\rangle = \\ &= \langle (\dot{\Theta}_1 + \Theta_1 N + N^T \Theta_1)y, y \rangle + 2p\langle B(x)y, y \rangle + \langle \Theta_1 S^{-1} B y, y \rangle + \langle B S^{-1} \Theta_1 y, y \rangle \geq \\ &\geq \varepsilon \|y\|^2 + 2p\langle B(x)y, y \rangle + 2\langle B y, S^{-1} \Theta_1 y \rangle. \end{aligned}$$

Uwzględniając spełnianie nierówności (7.18) dla symetrycznej macierzy $B(x)$, na podstawie udowodnionego wcześniej lematu, można stwierdzić dodatnią określoność pochodnej \dot{V}_p dla dostatecznie dużych wartości parametru $p > 0$, co oznacza, że układ (7.12) jest regularny.

□

Uwaga 7.2. Twierdzenie 7.1 zachodzi także i w przypadku, kiedy warunek (7.18) zamienimy na przeciwny: $\langle B(x)y, y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^m$.

Uwaga 7.3. Jeżeli w układzie (7.12) macierz $B(x)$ nie jest symetryczna, to bez względu na spełnianie nierówności (7.18) i regularność układu (7.29), układ (7.12) może nie mieć funkcji Greena.

Można się o tym przekonać rozpatrując następujący przykład.

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

PRZYKŁAD 7.1. Rozpatrzmy przykład, który ilustruje zastosowanie twierdzenia 7.1:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \cos^2 x & 0 \\ 0 & \beta_2 \cos^4 x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

gdzie $f(x) \in C_{\text{Lip}}(\mathbb{R})$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$. Ponieważ spełnione są wszystkie warunki twierdzenia 7.1, to układ (7.37) będzie regularny dla dowolnych ustalonych funkcji $f(x) \in C_{\text{Lip}}(\mathbb{R})$.

Z drugiej strony sprawdzimy regularność układu (7.37) wybierając funkcję Lapunowa w postaci:

$$V_p = py_1y_2 + y_1^2 - y_2^2. \quad (7.38)$$

Pokażemy, że zawsze znajdzie się dostatecznie duża wartość parametru $p > 0$, taka że pochodna formy kwadratowej (7.38) względem układu (7.37) będzie dodatnio określona. Obliczając tę pochodną, otrzymujemy:

$$\dot{V}_p = y_1^2(p\beta_1 \cos^2 x + 2) + y_2^2(p\beta_2 \cos^4 x + 2) + 2y_1y_2\beta_2 \cos^4 x - 2y_1y_2\beta_1 \cos^2 x. \quad (7.39)$$

Korzystając z oczywistych nierówności:

$$\begin{aligned} 2y_1y_2\beta_2 \cos^4 x &\geq -y_1^2 \cos^4 x - y_2^2\beta_2^2 \cos^4 x \geq -y_1^2 \cos^2 x - y_2^2\beta_2^2 \cos^4 x, \\ -2y_1y_2\beta_1 \cos^2 x &\geq -y_1^2 - y_2^2\beta_1^2 \cos^4 x, \end{aligned}$$

z równości (7.39) otrzymujemy:

$$\dot{V}_p \geq y_1^2((p\beta_1 - 1) \cos^2 x + 1) + y_2^2((p\beta_2 - \beta_1^2 - \beta_2^2) \cos^4 x + 2).$$

Widać stąd, że przy wyborze parametru $p = \max\left\{\frac{1}{\beta_1}, \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{\beta_2}\right\}$ pochodna formy kwadratowej (7.38) względem układu (7.37) jest dodatnio określona. To jeszcze raz potwierdza regularność układu (7.37).

Uwaga 7.4. Twierdzenie 7.1 daje tylko wystarczające warunki regularności układu (7.12). Założenia twierdzenia 7.1 mogą nie być spełnione, a układ (7.12) będzie regularny.

Potwierdza to następujący przykład.

PRZYKŁAD 7.2. Rozpatrzmy układ równań różniczkowych

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \cos^2 x & 0 \\ 0 & \beta_2 \cos^4 x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin x \\ \sin x & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

gdzie $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$. Układ, który odpowiada (7.29), ma postać:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin x \\ \sin x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (7.41)$$

i nie jest regularny, ponieważ odpowiedni niejednorodny układ:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 \sin t + h_1(t), \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_2 \sin t + h_2(t),$$

nie dla każdej ograniczonej na \mathbb{R} funkcji $(h_1(t), h_2(t))$ ma ograniczone rozwiązanie. Przy tym okazuje się, że układ (7.40) jest regularny. Przekonajmy się o tym wybierając funkcję Lapunowa w następującej postaci:

$$V = py_1y_2 + (y_1^2 - y_2^2) \sin x, \quad (7.42)$$

gdzie p to dodatni parametr. Obliczając pochodną, mamy:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= y_1^2 p \beta_1 \cos^2 x + y_2^2 p \beta_2 \cos^4 x + \\ &\quad + 2 \left[y_1 (y_1 \sin x + \beta_2 y_2 \cos^4 x) - y_2 (y_1 \beta_1 \cos^2 x - y_2 \sin x) \right] \sin x + \\ &\quad + (y_1^2 - y_2^2) \cos x = \\ &= y_1^2 (p \beta_1 \cos^2 x + 2 \sin^2 x + \cos x) + y_2^2 (p \beta_2 \cos^4 x + 2 \sin^2 x - \cos x) + \\ &\quad + 2y_1 y_2 \beta_2 \cos^4 x \sin x - 2y_1 y_2 \beta_1 \cos^2 x \sin x. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Korzystając z nierówności

$$\begin{aligned} 2y_1 y_2 \beta_2 \cos^4 x \sin x &\geq -y_1^2 \beta_2^2 \cos^8 x - y_2^2 \sin^2 x \geq -y_1^2 \beta_2^2 \cos^2 x - y_2^2 \sin^2 x, \\ -2y_1 y_2 \beta_1 \cos^2 x \sin x &\geq -y_1^2 \beta_1^2 \cos^2 x - y_2^2 \cos^2 x \sin^2 x \geq -y_1^2 \beta_1^2 \cos^2 x - y_2^2 \cos^2 x. \end{aligned}$$

i równości (7.43), dostajemy

$$\dot{V} \geq y_1^2 ((p\beta_1 - \beta_1^2 - \beta_2^2) \cos^2 x + 2 \sin^2 x + \cos x) + y_2^2 (p\beta_2 \cos^4 x + \sin^2 x - |\cos x| - \cos^2 x). \quad (7.44)$$

Aby wykazać dodatnią określoność pochodnej \dot{V} , wystarczy pokazać zachodzenie nierówności:

$$p\beta_2 \cos^4 x + \sin^2 x - |\cos x| - \cos^2 x > 0, \quad (7.45)$$

dla dostatecznie dużych wartości parametru $p > 0$. W tym celu oznaczmy $\tau = |\cos x|$, $\rho = p\beta_2$, i zbadajmy znak funkcji:

$$\varphi(\tau) = \rho\tau^4 - 2\tau^2 - \tau + 1, \quad (7.46)$$

dla wartości $0 \leq \tau \leq 1$. Na początku rozpatrzmy funkcję (7.46) na przedziale $\tau \in [0, \frac{1}{3}]$. Mamy wtedy:

$$\varphi(\tau) \geq -2\tau^2 - \tau + 1 \geq \frac{4}{9}, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{1}{3}.$$

Teraz oszacujmy funkcję (7.46) na przedziale $\tau \in [\frac{1}{3}, 1]$, otrzymując

$$\varphi(\tau) \geq \rho \left(\frac{1}{3}\right)^4 - 2\tau^2 - \tau + 1 \geq \rho \left(\frac{1}{3}\right)^4 - 2, \quad \frac{1}{3} \leq \tau \leq 1.$$

Potrzebujemy, aby

$$\rho \left(\frac{1}{3}\right)^4 - 2 \geq \frac{4}{9} \iff \rho \geq 198.$$

W ten sposób dla wartości parametru $\rho \geq 198$ będzie zachodzić nierówność:

$$p\beta_2 \cos^4 x + \sin^2 x - |\cos x| - \cos^2 x \geq \frac{4}{9} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Teraz z nierówności (7.45) widać, że pochodna \dot{V} formy kwadratowej (7.42) względem układu (7.40) będzie dodatnio określona dla dostatecznie dużych wartości parametru $p > 0$, a co oznacza, że układ (7.40) ma jedyną funkcję Greena.

Uwaga 7.5. Zwróćmy uwagę na to, że układ (7.40) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cos^2 x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \cos^4 x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin x \right\} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla zapisanego układu założenia twierdzenia 7.1 nie są spełnione, to powstaje problem zbadania wystarczających warunków regularności następujących układów:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S \frac{dy}{dt} = \left[\sum_{j=1}^k B_j(x) \cdot \nu_j(x) + M(x)\mu(x) \right] y, \quad (7.47)$$

z pewną niezdegenerowaną stałą symetryczną macierzą S , $f(x) \in C_{\text{Lip}}(\mathbb{R}^m)$.

Będziemy zakładać, że w układzie (7.47) **symetryczne** macierze $B_j(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$ są takie, że:

$$\begin{aligned} \langle B_j(x)y, y \rangle &\geq 0, \quad j = \overline{1, k} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, \\ \sum_{j=1}^k \langle B_j(x)y, y \rangle &\geq \beta \|y\|^2, \quad \beta = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Macierz $M(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$, tak jak wcześniej, jest skośnie symetryczna. Funkcje skalarne $\nu_j(x)$ $j = \overline{1, k}$ są ciągłe i ograniczone na \mathbb{R}^m ($\nu_j(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$) i przyjmują nieujemne wartości:

$$\nu_j(x) \geq 0, \quad j = \overline{1, k} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m. \quad (7.49)$$

Do takich funkcji mogą należeć przykładowo: $\cos^2 x$, $|\cos x|$, $\cos^4 x$, $\frac{1}{\cosh x}$, $(\frac{1}{\cosh x})^n$, $\sin^{2n} x_1 \cos^{2k} x_2$, itd. Skalarna funkcja $\mu(x)$ jest określona i ograniczona na \mathbb{R}^m , różniczkowalna w sposób ciągły i wszystkie jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są ciągłe

i ograniczone na \mathbb{R}^m , a więc $\mu(x) \in C^1(\mathbb{R}^m) \cap C^0(\mathbb{R}^m)$, $\frac{\partial \mu(x)}{\partial x_i} \in C^0(\mathbb{R}^m)$. Funkcjami takimi mogą być przykładowo: $\sin x$, $(\sin x)^{2k-1}$, $\operatorname{tgh} x$, $(\operatorname{tgh} x)^{2k-1}$, itd.

Założmy, że skalarnie funkcje $\nu_j(x)$, $\mu(x)$ tak są powiązane ze sobą, że dla dowolnych dodatnich stałych K, L istnieje dostatecznie wielka wartość parametru $p > 0$, taka że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^m$ zachodzi oszacowanie:

$$p\nu_0(x) + \mu^2(x) - K \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \mu(x)}{\partial x_i} \right| - L\bar{\nu}(x) \geq \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const} > 0, \quad (7.50)$$

gdzie $\nu_0(x) = \min \{ \nu_1(x), \dots, \nu_k(x) \}$, $\bar{\nu}(x) = \max \{ \nu_1(x), \dots, \nu_k(x) \}$. Można przykładowo wybrać: $\nu_1(x) = \cos^8 x$, $\nu_2(x) = \cos^{10} x$, $\mu(x) = \sin^3 x$ i oszacowanie (7.50) będzie zachodzić dla dostatecznie dużych ustalonych wartości parametru $p > 0$.

Ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.2. *Założmy, że istnieje stała $n \times n$ wymiarowa symetryczna macierz Θ , która spełnia nierówność:*

$$\left\langle \left[\Theta S^{-1} M(x) - M(x) S^{-1} \Theta \right] y, y \right\rangle \geq \|y\|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (7.51)$$

Wtedy, jeżeli spełnione są warunki (7.48) – (7.50), to układ (7.47) jest regularny dla każdej ustalonej ograniczonej funkcji $f(x) \in C_{\text{Lip}}(\mathbb{R}^m) \cap C^0(\mathbb{R}^m)$. Przy tym pochodna formy kwadratowej:

$$V = p\langle Sy, y \rangle + \langle \Theta y, y \rangle \cdot \mu(x), \quad (7.52)$$

względem układu (7.47) będzie dodatnio określona dla dostatecznie dużych wartości parametru $p > 0$.

DOWÓD. Zapiszmy pochodną formy kwadratowej (7.52) względem układu (7.47). Mamy:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2p \sum_{j=1}^k \langle B_j(x)y, y \rangle \cdot \nu_j(x) + 2 \left\langle \Theta y, S^{-1} \left[\sum_{j=1}^k B_j(x) \cdot \nu_j(x) + M(x)\mu(x) \right] y \right\rangle \mu(x) + \\ &+ \langle \Theta y, y \rangle \dot{\mu}(x) \geq 2p\beta \|y\|^2 \nu_0(x) + 2 \left\langle \Theta y, S^{-1} \left[\sum_{j=1}^k B_j(x)\nu_j(x) \right] y \right\rangle \mu(x) + \\ &+ 2 \langle \Theta y, S^{-1} M(x)y \rangle \mu^2(x) + \langle \Theta y, y \rangle \dot{\mu}(x), \end{aligned} \quad (7.53)$$

gdzie $\dot{\mu}(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mu(x)}{\partial x_i} f_i(x)$.

Teraz oszacujemy każdy ze składników (7.53). Mamy:

$$2 \langle \Theta y, S^{-1} B_j(x)y \rangle \nu_j(x) \mu(x) \geq -2 \| \Theta S^{-1} B_j \|_0 \|y\|^2 \nu_j(x) |\mu|_0 \geq -L_0 \nu_j(x) \|y\|^2$$

$$2 \langle \Theta y, S^{-1} M(x)y \rangle \mu^2(x) \geq \|y\|^2 \mu^2(x)$$

$$\langle \Theta y, y \rangle \dot{\mu}(x) \geq -\| \Theta \| |\dot{\mu}(x)| \cdot \|y\|^2 \geq -K_1 \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right| \|y\|^2,$$

gdzie L_0, K_1 są dodatnimi stałymi. W związku z zapisanymi powyżej nierównościami, otrzymujemy:

$$\dot{V} \geq \left(2p\beta\nu_0(x) + \mu^2(x) - K_1 \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right| - L\bar{\nu}(x) \right) \|y\|^2.$$

Na podstawie założenia (7.50) możemy stwierdzić, że pochodna \dot{V} formy kwadratowej (7.52) względem układu (7.47) jest dodatnio określona dla dostatecznie dużych wartości parametru $p > 0$, a co oznacza, że układ (7.47) jest regularny.

□

8. Klasy ostro słabo regularnych liniowych rozszerzeń na torusie

Rozważmy z kolei warunki słabej regularności następującego układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \omega_{11} \sin x_1 + \omega_{12} \sin x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \omega_{21} \sin x_1 + \omega_{22} \sin x_2, \\ \frac{dy}{dt} = (d_1 \cos x_1 + d_2 \cos x_2)y, \end{cases} \quad (8.1)$$

gdzie $y \in \mathbb{R}$, zaś $\omega_{ij}, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ są pewnymi stałymi. Rozpatrzmy formę kwadratową postaci

$$V = -(d_1 \cos x_1 + d_2 \cos x_2)y^2,$$

i sprawdźmy, przy jakich współczynnikach ω_{ij}, d_j pochodna tej formy wzdłuż rozwiązań układu sprzężonego do układu (8.1), tj. układu o postaci:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \omega_{11} \sin x_1 + \omega_{12} \sin x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \omega_{21} \sin x_1 + \omega_{22} \sin x_2, \\ \frac{dy}{dt} = -(d_1 \cos x_1 + d_2 \cos x_2)y, \end{cases} \quad (8.2)$$

będzie dodatnio określona. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & - \left[d_1 (-\sin x_1)(\omega_{11} \sin x_1 + \omega_{12} \sin x_2) + \right. \\ & \left. + d_2 (-\sin x_2)(\omega_{21} \sin x_1 + \omega_{22} \sin x_2) \right] y^2 + 2(d_1 \cos x_1 + d_2 \cos x_2)^2 y^2, \end{aligned}$$

skąd po uporządkowaniu wyrażeń otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \left[d_1 \omega_{11} \sin^2 x_1 + d_1 \omega_{12} \sin x_1 \sin x_2 + d_2 \omega_{21} \sin x_1 \sin x_2 + \right. \\ & \left. + d_2 \omega_{22} \sin^2 x_2 \right] y^2 + 2(d_1 \cos x_1 + d_2 \cos x_2)^2 y^2. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Oznaczmy $t_1 = \sin x_1$, $t_2 = \sin x_2$ oraz określmy formę kwadratową Φ następująco:

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^2 d_i \omega_{ij} t_i t_j.$$

Przypuśćmy teraz, że forma kwadratowa Φ jest dodatnio określona, tzn. spełniona jest nierówność

$$\Phi \geq \varepsilon(t_1^2 + t_2^2), \quad \varepsilon = \text{const} > 0. \quad (8.4)$$

Rozważmy z kolei układ:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \omega_{11} \sin x_1 + \omega_{12} \sin x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \omega_{21} \sin x_1 + \omega_{22} \sin x_2, \\ \frac{dy}{dt} = (A \cos x_1 + B \cos x_2)y, \end{cases} \quad (8.16)$$

gdzie stałe $\omega_{ij} \in \mathbb{R}$ oraz $y \in \mathbb{R}^n$, zaś A, B są $n \times n$ wymiarowymi symetrycznymi macierzami. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.1. *Układ (8.16) posiada nieskończenie wiele funkcji Greena, jeśli macierz S , określona wzorem:*

$$S = \begin{bmatrix} \omega_{11}A & \frac{1}{2}(\omega_{12}A + \omega_{21}B) \\ \frac{1}{2}(\omega_{12}A + \omega_{21}B) & \omega_{22}B \end{bmatrix}, \quad (8.17)$$

jest dodatnio określona oraz spełniony jest warunek:

$$\det(A \pm B) \neq 0. \quad (8.18)$$

DOWÓD. Podobnie, jak w przypadku układu (8.1), rozpatrzmy formę kwadratową postaci

$$V = \left\langle -[A \cos x_1 + B \cos x_2]y, y \right\rangle. \quad (8.19)$$

Obliczmy pochodną tej formy wzdłuż rozwiązań układu sprzężonego do układu (8.16), czyli układu o postaci:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \omega_{11} \sin x_1 + \omega_{12} \sin x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \omega_{21} \sin x_1 + \omega_{22} \sin x_2, \\ \frac{dy}{dt} = -(A \cos x_1 + B \cos x_2)y. \end{cases} \quad (8.20)$$

Mamy

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \left\langle [A \sin x_1(\omega_{11} \sin x_1 + \omega_{12} \sin x_2) + \right. \\ & \left. + B \sin x_2(\omega_{21} \sin x_1 + \omega_{22} \sin x_2)]y, y \right\rangle + \\ & + 2 \left\langle [A \cos x_1 + B \cos x_2]y, [A \cos x_1 + B \cos x_2]y \right\rangle, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \left\langle Ay, y \right\rangle \omega_{11} \sin^2 x_1 + \left\langle Ay, y \right\rangle \omega_{12} \sin x_1 \sin x_2 + \\ & + \left\langle By, y \right\rangle \omega_{21} \sin x_1 \sin x_2 + \left\langle By, y \right\rangle \omega_{22} \sin^2 x_2 + \\ & + 2 \left\| [A \cos x_1 + B \cos x_2]y \right\|^2. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Oznaczmy $y_1 = y \sin x_1$, $y_2 = y \sin x_2$ oraz określmy formę kwadratową Φ następująco:

$$\Phi = \langle Ay_1, y_1 \rangle \omega_{11} + \langle Ay_1, y_2 \rangle \omega_{12} + \langle By_1, y_2 \rangle \omega_{21} + \langle By_2, y_2 \rangle \omega_{22}.$$

Zauważmy, że formę kwadratową Φ można również przedstawić w postaci:

$$\Phi = \langle S\bar{y}, \bar{y} \rangle, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie S jest macierzą daną wzorem (8.17). Ponieważ macierz S jest dodatnio określona, więc dla formy kwadratowej Φ spełniona jest nierówność:

$$\Phi \geq \varepsilon(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2) = \varepsilon(\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2)\|y\|^2, \quad \varepsilon = \text{const} > 0. \quad (8.22)$$

Pochodną formy kwadratowej (8.21) można zatem oszacować następująco:

$$\dot{V} \geq \varepsilon(\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2)\|y\|^2 + 2\| [A \cos x_1 + B \cos x_2] y \|^2. \quad (8.23)$$

Prawa strona nierówności (8.23) zeruje się dla $y \neq 0$, gdy jednocześnie spełnione są warunki: $x_1 = k\pi$, $x_2 = l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$ oraz kiedy

$$[A \cos k\pi + B \cos l\pi] y = 0.$$

Oznacza to, że prawa strona nierówności (8.23) będzie dodatnio określona, gdy układ równań:

$$[(-1)^k A + (-1)^l B] y = 0, \quad (8.24)$$

nie posiada niezerowych rozwiązań, co będzie spełnione przy warunku (8.18). Pochodna formy kwadratowej (8.19) jest zatem dodatnio określona, a więc układ (8.16) będzie posiadał nieskończenie wiele funkcji Greena. \square

9. Całkowa postać ograniczonych rozmaitości pewnych układów równań różniczkowych

Chociaż przeprowadzono głębokie badania problemu istnienia funkcji Greena (1.6) dla układu (1.1), to konkretny zapis funkcji Greena dla nawet prostych przykładów jest skomplikowany, a czasami wręcz niemożliwy. Przekonamy się o tym w niniejszym rozdziale.

Założmy, że istnieje forma kwadratowa

$$V = \langle S(x)y, y \rangle, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (9.1)$$

w której symetryczna macierz współczynników $S(x)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły i ograniczona na \mathbb{R}^m . Niech pochodna tej formy względem układu sprzężonego do układu (1.1) postaci:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ \frac{dy}{dt} = -A^T(x)y, \end{cases} \quad (9.2)$$

będzie dodatnio określona. Wówczas spełniony jest warunek:

$$\left\langle [\dot{S}(x) - S(x)A^T(x) - A(x)S(x)]y, y \right\rangle \geq \|y\|^2, \quad (9.3)$$

gdzie $\dot{S}(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x} f(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial S(x)}{\partial x_j} f_j(x)$.

Oznaczmy przez \widehat{M} zbiór takich wartości $x = \hat{x} \in \mathbb{R}^m$, że macierz współczynników $S(x(t; x))$ z formy kwadratowej (9.1) dla dostatecznie dużych dodatnich wartości t , $t \in [T(\hat{x}), +\infty)$, jest dodatnio określona, a dla dostatecznie dużych ujemnych wartości t , $t \in (-\infty, -T(\hat{x})]$, jest ujemnie określona.

Przykładowo, jeśli sprzężony układ jest o postaci:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dy}{dt} = n(\operatorname{tgh} x)y, \end{cases} \quad (9.4)$$

gdzie stała $n > 0$, to zbiór \widehat{M} pokrywa się z \mathbb{R} , ponieważ każda różniczkowalna w sposób ciągły i ograniczona na \mathbb{R} funkcja $s(x)$, która spełnia nierówność:

$$\dot{s}(x) + 2ns(x) \operatorname{tgh} x \geq 1,$$

musi przyjmować wartości dodatnie dla dostatecznie dużych x i wartości ujemne dla dostatecznie dużych ujemnych wartości x .

Jeśli z kolei rozpatrzymy przykład:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin x, \\ \frac{dy}{dt} = -a(\cos x)y, \end{cases} \quad (9.5)$$

z dodatnią stałą a , to $\widehat{M} = \mathbb{R} \setminus \{\pi n\}$, gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Zauważmy, że jeśli w układzie:

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t; x_0))y, \quad (9.6)$$

wartości parametrów $x = \hat{x} \in \widehat{M}$, to wszystkie rozwiązania tego układu eksponencjalnie dążą do zera dla $|t| \rightarrow \infty$, a mówiąc bardziej dokładnie oznacza to, że dla macierzy fundamentalnej $\Omega_\tau^t(\hat{x})$ układu (9.6) dla $x = \hat{x} \in \widehat{M}$ spełniony jest warunek:

$$\|\Omega_\tau^t(\hat{x})\| \leq N e^{-\gamma|t-\tau|}, \quad (9.7)$$

z pewnymi dodatnimi stałymi N, γ , które mogą zależeć tylko od $\hat{x} \in \widehat{M}$. Zauważmy tutaj, że zbiór \widehat{M} nie zależy od wyboru różniczkowalnej w sposób ciągły i ograniczonej macierzy $S(x)$, która spełnia warunek (9.3).

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9.1. *Przypuśćmy, że istnieje różniczkowalna w sposób ciągły i ograniczona na \mathbb{R}^m symetryczna macierz $S(x)$, dla której spełniony jest warunek (9.3). Wówczas istnieje ciągła i ograniczona na \mathbb{R}^m macierz $C(x)$, taka że dla funkcji (1.6) spełniona jest nierówność (1.7) i dla każdego $x = \hat{x} \in \widehat{M}$ wartości macierzy $C(x(\tau; \hat{x}))$ określone są równościami:*

$$C(x(\tau; \hat{x})) = \Omega_0^\tau(\hat{x}) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Omega_0^z(\hat{x}) \right)^T \Omega_0^z(\hat{x}) dz \right]^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\tau} \left(\Omega_0^z(\hat{x}) \right)^T \Omega_0^z(\hat{x}) dz \right] \Omega_\tau^0(\hat{x}). \quad (9.8)$$

DOWÓD. Doprowadźmy układ (1.1) do układu regularnego

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ \frac{dy_1}{dt} = A(x)y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 - A^T(x)y_2, \quad y_i \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (9.9)$$

który posiada dokładnie jedną $2n \times 2n$ -wymiarową funkcję Greena:

$$\begin{aligned} \overline{G}_0(\tau, x) &= \\ &= \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(x) & 0 \\ \omega(0, \tau, x) & (\Omega_0^\tau(x))^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(x(\tau; x)) & C_{12}(x(\tau; x)) \\ C_{21}(x(\tau; x)) & C_{22}(x(\tau; x)) \end{bmatrix}, & \tau \leq 0, \\ \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(x) & 0 \\ \omega(0, \tau, x) & (\Omega_0^\tau(x))^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(x(\tau; x)) - I_n & C_{12}(x(\tau; x)) \\ C_{21}(x(\tau; x)) & C_{22}(x(\tau; x)) - I_n \end{bmatrix}, & \tau > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (9.10)$$

gdzie $\omega(t, \tau, x) = \int_{\tau}^t (\Omega_t^z(x))^T \Omega_{\tau}^z(x) dz$.

Dla dowolnych wartości \bar{x}, \tilde{x} ma miejsce równość

$$\bar{G}_0(\tau, \bar{x}) - \bar{G}_0(\tau, \tilde{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(z, \bar{x}) \left[P(x(z; \bar{x})) - P(x(z; \tilde{x})) \right] \bar{G}_z(\tau, \tilde{x}) dz,$$

gdzie $P(x) = \begin{bmatrix} A(x) & 0 \\ I_n & -A^T(x) \end{bmatrix}$, z której wynika nierówność

$$\left\| \bar{G}_0(\tau, \bar{x}) - \bar{G}_0(\tau, \tilde{x}) \right\| \leq L \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| P(x(z; \bar{x})) - P(x(z; \tilde{x})) \right\| e^{-\gamma|z|} dz.$$

Ponieważ po prawej stronie nierówności całka jest zbieżna jednostajnie względem $\bar{x}, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$, to jest ona funkcją ciągłą, zależną od zmiennych \bar{x}, \tilde{x} i dla $\bar{x} = \tilde{x}$ przyjmuje wartość równą zero. Uwzględniając to, że $\bar{G}_0(0^-, x) = [C_{ij}(x)]_{i,j=1,2}$, na podstawie nierówności, możemy stwierdzić ciągłą zależność względem zmiennych $x \in \mathbb{R}^m$ macierzy $C_{ij}(x)$ z postaci funkcji Greena (9.10). Blok $C_{11}(x) = C(x)$ jest tą funkcją, z jaką funkcja Greena (1.6) spełnia warunek (1.7).

Znajdźmy równania wzajemnie dopełniających podprzestrzeni $E^+(\hat{x}), E^-(\hat{x})$ z \mathbb{R}^{2n} , takich, że wszystkie rozwiązania układu:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = A(x_t(\hat{x}))y_1, & \hat{x} \in \widehat{M}, \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 - A^T(x_t(\hat{x}))y_2, & y_i \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (9.11)$$

które mają początek dla $t = 0$ w $E^+(\hat{x})$ i dążą do zera w $+\infty$, oraz rozwiązania, które mają początek dla $t = 0$ w $E^-(\hat{x})$ i dążą do zera przy $t \rightarrow -\infty$. W tym celu ogólne rozwiązanie $y_1(t) = \Omega_0^t(\hat{x})y_{10}$ pierwszej części układu (9.11) podstawmy do drugiej części tego układu, otrzymując

$$\frac{dy_2}{dt} = -A^T(x_t(\hat{x}))y_2 + \Omega_0^t(\hat{x})y_{10}. \quad (9.12)$$

Zapiszmy ogólne rozwiązanie tego układu w postaci:

$$y_2(t) = \left(\Omega_t^0(\hat{x}) \right)^T \left[y_{20} + \int_0^t \left(\Omega_0^z(\hat{x}) \right)^T \Omega_0^z(\hat{x}) dz \cdot y_{10} \right]. \quad (9.13)$$

Ponieważ $\left(\Omega_t^0(\hat{x}) \right)^T$ jest macierzą fundamentalną układu sprzężonego do układu (9.6), to rozwiązanie $y(t) = \left(\Omega_t^0(\hat{x}) \right)^T y_0$ wzrasta w $+\infty$ i w $-\infty$. Z drugiej strony, jeżeli początkowe wartości y_{10}, y_{20} znajdują się w podprzestrzeni $E^+(\hat{x})$, to funkcja (9.13) powinna dążyć do zera w $+\infty$, tzn. musi zachodzić równość:

$$y_{20} + \int_0^{+\infty} \left(\Omega_0^z(\hat{x}) \right)^T \Omega_0^z(\hat{x}) dz \cdot y_{10} = 0. \quad (9.14)$$

Analogicznie, jeśli wartości początkowe y_{10} , y_{20} znajdują się w podprzestrzeni $E^-(\hat{x})$, to z równości (9.13) otrzymujemy

$$y_{20} - \int_{-\infty}^0 \left(\Omega_0^z(\hat{x}) \right)^T \Omega_0^z(\hat{x}) dz \cdot y_{10} = 0. \quad (9.15)$$

Oczywiście równanie (9.14) opisuje podprzestrzeń $E^+(\hat{x})$, a równanie (9.15) określa podprzestrzeń $E^-(\hat{x})$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\Phi_+ = \int_0^{+\infty} \left(\Omega_0^z(\hat{x}) \right)^T \Omega_0^z(\hat{x}) dz, \quad (9.16)$$

$$\Phi_- = \int_{-\infty}^0 \left(\Omega_0^z(\hat{x}) \right)^T \Omega_0^z(\hat{x}) dz, \quad (9.17)$$

przy czym $\Phi = \Phi_+ + \Phi_-$. W ten sposób równania podprzestrzeni $E^+(\hat{x})$ i $E^-(\hat{x})$ mają postać:

$$E^+ : \quad y + \Phi_+ y = 0, \quad E^- : \quad y - \Phi_- y = 0.$$

Teraz znajdziemy $2n \times 2n$ wymiarową macierz rzutowania P na podprzestrzeń E^+ wzdłuż podprzestrzeni E^- . Wystarczy w tym celu znaleźć rzuty wektorów jednostkowych, a więc znaleźć $P \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ i $P \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}$. Zapiszmy odpowiednie układy równań:

$$\begin{cases} Y + \Phi_+ X = 0, \\ Y - \Phi_-(X - I_n) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Y + \Phi_+ X = 0, \\ Y - I_n - \Phi_- X = 0, \end{cases}$$

gdzie X, Y są zmiennymi kwadratowymi macierzami. Na podstawie rozwiązań tych układów tworzymy macierz P :

$$P = \begin{bmatrix} \Phi^{-1} \Phi_- & -\Phi^{-1} \\ -\Phi_+ \Phi^{-1} \Phi_- & \Phi_+ \Phi^{-1} \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

Ponieważ funkcja Greena (9.10) jest jedyna dla rozszerzonego układu (9.9), to dla macierzy rzutowania $[C_{ij}(x)]_{i,j=1,2}$ spełnione są tożsamości (1.23), stąd w naszym przypadku dla wartości $x = \hat{x} \in \widehat{M}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{11}(x(\tau; \hat{x})) & C_{12}(x(\tau; \hat{x})) \\ C_{21}(x(\tau; \hat{x})) & C_{22}(x(\tau; \hat{x})) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \Omega_0^\tau(\hat{x}) & 0 \\ \omega(0, \tau, \hat{x}) & \left(\Omega_\tau^0(\hat{x}) \right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^{-1} \Phi_- & -\Phi^{-1} \\ -\Phi_+ \Phi^{-1} \Phi_- & \Phi_+ \Phi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\hat{x}) & 0 \\ \omega(\tau, 0, \hat{x}) & \left(\Omega_0^\tau(\hat{x}) \right)^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Blok $C_{11}(\hat{x})$ zapisanej macierzy jest macierzą $C(\hat{x})$ w strukturze funkcji Greena (1.6) dla wartości $x = \hat{x} \in \widehat{M}$, skąd

$$C(x(\tau; \hat{x})) = C_{11}(x(\tau; \hat{x})) = \Omega_0^\tau(\hat{x}) \Phi^{-1} \left[\Phi_- - \int_\tau^0 \left(\Omega_0^z(\hat{x}) \right)^T \Omega_0^z(\hat{x}) dz \right] \Omega_\tau^0(\hat{x}).$$

Korzystając teraz z oznaczeń (9.16), (9.17), otrzymujemy równość (9.8). \square

Uwaga 9.1. W przypadku kiedy zbiór \widehat{M} jest wszędzie gęsty w \mathbb{R}^n , macierz $C(\widehat{x})$, wyznaczoną wzorem (9.8), można dookreślić do macierzy ciągłej dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$.

Uwaga 9.2. Rozpatrując zamiast układu (9.9) bardziej ogólny:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ \frac{dy_1}{dt} = A(x)y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = B(x)y_1 - A^T(x)y_2, \end{cases} \quad y_i \in \mathbb{R}^n, \quad (9.19)$$

z pewną $n \times n$ wymiarową macierzą $B(x)$, ciągłą i ograniczoną na \mathbb{R}^m , dla której spełniony jest warunek dodatniej określoności:

$$\langle B(x)y, y \rangle \geq \beta \|y\|^2, \quad \beta = \text{const} > 0, \quad (9.20)$$

postać (9.8) macierzy $C(x(\tau; \widehat{x}))$ można zapisać w następujący sposób:

$$C(x_\tau(\widehat{x})) = \Omega_0^\tau(\widehat{x}) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Omega_0^z(\widehat{x}) \right)^T B(x(z; \widehat{x})) \Omega_0^z(\widehat{x}) dz \right]^{-1} \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\tau} \left(\Omega_0^z(\widehat{x}) \right)^T B(x(z; \widehat{x})) \Omega_0^z(\widehat{x}) dz \right] \Omega_\tau^0(\widehat{x}).$$

Uwaga 9.3. Jeśli warunek (9.20) zamienimy na słabszy:

$$\langle B(x)y, y \rangle > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0, \quad (9.21)$$

to przy spełnieniu nierówności (9.3) układ liniowy:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = A(x(t; x))y_1, & x \in \mathbb{R}^m, \\ \frac{dy_2}{dt} = B(x(t; x))y_1 - A^T(x(t; x))y_2, & y_i \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (9.22)$$

będzie eksponencjalnie dychotomiczny na osi \mathbb{R} dla każdej ustalonej wartości parametru $x \in \mathbb{R}^m$, a funkcja Greena dla układu (9.19) może nawet nie istnieć. Można to zilustrować na przykładzie:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = 1, & i = 1, 2, \\ \frac{dy_1}{dt} = (-2 \operatorname{tgh} x_1 + \operatorname{tgh} x_2)y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = \left(\frac{1}{\cosh^2 x_2} \right) y_1 + (2 \operatorname{tgh} x_1 - \operatorname{tgh} x_2)y_2. \end{cases}$$

Uwaga 9.4. Sposób konstrukcji macierzy rzutowania (9.18) pozwala na zapis macierzy P w nieco ogólniejszej postaci. Mianowicie, jeśli pewna podprzestrzeń E^+ jest wyznaczona układem równań:

$$A_{11}y_1 + A_{12}y_2 = 0,$$

a podprzestrzeń E^- innym układem równań:

$$A_{21}y_1 + A_{22}y_2 = 0,$$

i podprzestrzenie te są wzajemnie dopełniające w \mathbb{R}^n : $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$, co oznacza, że

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \neq 0,$$

to macierz rzutowania na podprzestrzeń E^+ wzdłuż podprzestrzeni E^- posiada postać:

$$P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Rozpatrzmy teraz, metodą porównania, jednocześnie dwa przykłady:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dy}{dt} = -n(\operatorname{tgh} x)y, \end{cases} \quad (9.23)$$

i

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin x, \\ \frac{dy}{dt} = n(\cos x)y, \end{cases} \quad (9.24)$$

gdzie n jest liczbą naturalną. Dla układu (9.23) mamy:

$$x(t; x) = t + x, \quad \Omega_\tau^t(x) = \left(\frac{e^{\tau+x} + e^{-\tau-x}}{e^{t+x} + e^{-t-x}} \right)^n,$$

a dla układu (9.24) otrzymujemy

$$\Omega_\tau^t(x) = \left(\frac{e^\tau \cos^2 \frac{x}{2} + e^{-\tau} \sin^2 \frac{x}{2}}{e^t \cos^2 \frac{x}{2} + e^{-t} \sin^2 \frac{x}{2}} \right)^n,$$

W celu bezpośredniego wyznaczenia funkcji $C(x)$, która występuje w strukturze funkcji Greena (1.6), otrzymujemy, odpowiednio dla układów (9.23), (9.24), następujące układy nierówności:

$$\begin{cases} |C(x)| \leq K \left(\frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \right)^n, \\ |C(x) - 1| \leq K \left(\frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^n, \end{cases} \quad (9.25)$$

oraz

$$\begin{cases} |C(x)| \leq K \left(\sin^2 \frac{x}{2} \right)^n, \\ |C(x) - 1| \leq K \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right)^n. \end{cases} \quad (9.26)$$

Dla wyznaczenia funkcji $C(x)$ zastosujemy teraz wzór (9.8) dla wartości $\tau = 0$. Otrzymujemy wtedy:

$$C(x) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^{t+x} + e^{-t-x}} \right)^{2n} dt \right]^{-1} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^{t+x} + e^{-t-x}} \right)^{2n} dt, \quad (9.27)$$

dla układu (9.23) i odpowiednio dla układu (9.24):

$$C(x) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^t \cos^2 \frac{x}{2} + e^{-t} \sin^2 \frac{x}{2}} \right)^{2n} dt \right]^{-1} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{e^t \cos^2 \frac{x}{2} + e^{-t} \sin^2 \frac{x}{2}} \right)^{2n} dt. \quad (9.28)$$

Obliczając całki (9.27), (9.28) dla $n = 2$, dostajemy odpowiednio

$$C(x) = 1 - 3 \left(\frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 + 2 \left(\frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^3, \quad (9.29)$$

i

$$C(x) = 1 - 3 \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right)^2 + 2 \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right)^3, \quad (9.30)$$

a dla $n = 3$ odpowiednio

$$C(x) = 1 - 10 \left(\frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^3 + 15 \left(\frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^4 - 6 \left(\frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^5, \quad (9.31)$$

i

$$C(x) = 1 - 10 \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right)^3 + 15 \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right)^4 - 6 \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right)^5. \quad (9.32)$$

Dokonując w całce (9.27) zamiany zmiennych $y = e^{2(t+x)}$, otrzymujemy

$$C(x) = \left[\int_0^{+\infty} \frac{y^{n-1}}{(y+1)^{2n}} dy \right]^{-1} \int_0^{e^{2x}} \frac{y^{n-1}}{(y+1)^{2n}} dy. \quad (9.33)$$

Wykorzystując rozkład

$$\frac{y^{n-1}}{(y+1)^{2n}} = \frac{A_n}{(y+1)^{2n}} + \frac{A_{n-1}}{(y+1)^{2n-1}} + \dots + \frac{A_1}{(y+1)^{n+1}},$$

znajdujemy współczynniki

$$A_j = \frac{(n-1)!}{(n-j)!(j-1)!} (-1)^{j-1} = C_{n-1}^{j-1} (-1)^{j-1}, \quad (9.34)$$

i obliczamy całkę z równości (9.33), uzyskując

$$C(x) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{n+j-1} \left(\frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^{n+j-1}}{\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{n+j-1}}. \quad (9.35)$$

Podobnie podstawiając w całce (9.28) $y = e^{-2t} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$, otrzymujemy

$$C(x) = \left[\int_0^{+\infty} \frac{y^{n-1}}{(y+1)^{2n}} dy \right]^{-1} \int_0^{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \frac{y^{n-1}}{(y+1)^{2n}} dy,$$

a stąd, podobnie jak wcześniej, mamy

$$C(x) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{n+j-1} \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right)^{n+j-1}}{\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{n+j-1}}. \quad (9.36)$$

Oznaczmy $y = \sin^2 \frac{x}{2}$ i rozpatrzmy funkcję:

$$\Phi(y) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{n+j-1} (1-y)^{n+j-1}}{\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{n+j-1}}. \quad (9.37)$$

Aby spełniona była pierwsza nierówność z układu (9.26) dla funkcji (9.36), należy wielomian (9.37) przedstawić w postaci $\Phi(y) = y^n \Phi_1(y)$, gdzie $\Phi_1(y)$ jest pewnym wielomianem. Oznacza to, żeby dla $y = 0$, wszystkie pochodne funkcji $\Phi(y)$ do rzędu n włącznie są równe zeru. Ze wzoru (9.37) widać, że $\Phi(0) = 0$ oraz

$$\Phi'(y) = - \left(\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{n+j-1} \right)^{-1} \sum_{j=1}^n A_j (1-y)^{n+j-2},$$

stąd

$$- \sum_{j=1}^n \frac{A_j \Phi'(y)}{n+j-1} = \sum_{j=1}^n A_j (1-y)^{n+j-2} = (1-y)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i (y-1)^i = (1-y)^{n-1} y^{n-1}.$$

Mamy zatem

$$\Phi'(0) = \sum_{j=1}^n C_{n-1}^{j-1} (-1)^{j-1} = 0.$$

Obliczając teraz pozostałe wartości pochodnych: $\Phi''(0), \Phi'''(0), \dots, \Phi^{(n)}(0)$, spełnione będą następujące równości:

$$\begin{aligned} \Phi''(0) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} C_{n-1}^{j-1} (n+j-2) = 0, \\ \Phi'''(0) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} C_{n-1}^{j-1} (n+j-2)(n+j-3) = 0, \\ \Phi^{(4)}(0) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} C_{n-1}^{j-1} (n+j-2)(n+j-3)(n+j-4) = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi^{(n)}(0) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} C_{n-1}^{j-1} (n+j-2)(n+j-3)(n+j-4) \cdot \dots \cdot j = 0. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Powróćmy teraz do całki (9.33) i podstawmy $\sigma = \frac{1}{y+1}$. Otrzymamy wtedy:

$$C(x) = \frac{\int_0^{\frac{1}{e^{2x}+1}} (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma}{\int_0^1 (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma}.$$

Rozpatrzmy funkcję zmiennej z , mającą postać

$$\Theta(z) = \frac{\int_0^1 (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma}{\int_0^1 (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma}. \quad (9.39)$$

W ten sposób funkcję (9.35) można zapisać jako $C(x) = \Theta\left(\frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$, a funkcję (9.36) zapisać jako $C(x) = \Theta\left(\cos^2 \frac{x}{2}\right)$, przy czym wielomian (9.37) i wielomian $\Theta(1-y)$ są jednakowe. Dla wielomianu $\Theta(1-y)$ łatwo otrzymujemy zależność

$$\begin{aligned} \Theta(1-y) &= \frac{\int_0^{1-y} (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma}{\int_0^1 (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma} = \frac{\int_0^y (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma}{\int_0^1 (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma} = \\ &= y^n \frac{\sum_{j=1}^n C_{n-1}^{j-1} (-1)^{j-1} \frac{y^{j-1}}{n+j-1}}{\sum_{j=1}^n C_{n-1}^{j-1} (-1)^{j-1} \frac{1}{n+j-1}}, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} 1 - \Theta(y) &= \frac{\int_0^0 (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma - \int_0^y (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma}{\int_0^1 (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma} = \\ &= \frac{\int_0^y (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma}{\int_0^1 (1-\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} d\sigma} = y^n \frac{\sum_{j=1}^n C_{n-1}^{j-1} (-1)^{j-1} \frac{y^{j-1}}{n+j-1}}{\sum_{j=1}^n C_{n-1}^{j-1} (-1)^{j-1} \frac{1}{n+j-1}}. \end{aligned}$$

Uwaga 9.5. Dla wielomianu (9.39) spełniona jest tożsamość: $\Theta(y) + \Theta(1-y) \equiv 1$.

Uwaga 9.6. Jeśli rozpatrzmy równanie funkcyjne:

$$\Theta(y) + \Theta(1-y) = 1, \quad (9.40)$$

to bezpośrednie znalezienie funkcji $\Theta(y)$, takiej żeby punkt $y = 0$ był pierwiastkiem krotności n dla różnicy $\Theta(y) - 1$, może sprawiać pewne trudności. Łatwo można się przekonać, że rozwiązaniami równania (9.40) będą wielomiany:

- a) $\Theta(y) = 2y^3 - 3y^2 + 1 \quad (n = 2)$,
- b) $\Theta(y) = -6y^5 + 15y^4 - 10y^3 + 1 \quad (n = 3)$,

c) $\Theta(y) = 20y^7 - 70y^6 + 84y^5 - 35y^4 + 1 \quad (n = 4)$.

Uwaga 9.7. Spełnione są równości (9.38), które można zapisać w postaci:

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} C_{n-1}^{j-1} \cdot C_{n+j-2}^{k-1} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Bibliografia

1. E. A. Barbashin, *Lyapunov functions* (po rosyjsku), Nauka, Moscow 1970.
2. N. N. Bogoliubov, Y. A. Mitropolskij, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Gordon and Breach, New York 1961.
3. N. N. Bogoljubov, *Quasiperiodic solutions in problems of nonlinear mechanics*, First Math. Summer School, cz. I (po rosyjsku), 11–101, Naukova Dumka, Kiev 1964.
4. N. N. Bogolyubov, Y. A. Mitropolskij, A. M. Samoilenko, *Methods of accelerated convergence in nonlinear mechanics*, Springer-Verlag. VIII, Berlin-Heidelberg-New York 1976.
5. S. P. Diliberto, *Perturbation theorems for periodic surfaces I—Definitions and main theorems*, Rend. Circolo Mat. Palermo **9**, nr 3 (1960), 265–299.
6. S. P. Diliberto, *Perturbation theorems for periodic surfaces II*, Rend. Circolo Mat. Palermo **10**, nr 2 (1961), 111–161.
2003.
7. K. O. Friedrichs, *Symmetric positive linear differential equations*, Cornm. Pure Appl. Math. **11** (1958), 333–418.
8. J. K. Hale, *Oscillations in nonlinear systems*, McGraw–Hill, New York 1963.
9. N. M. Krylov and N. N. Bogolyubov, *New methods in non-linear mechanics*, ONTI GTTI, Moscow-Leningrad 1934.
10. A. N. Kulyk, V. L. Kulyk, *Lyapunov functions and dichotomy of linear differential-equation systems on half-lines*, Differ. Equations **20** (1984), 181–187.
11. V. L. Kulyk, A. N. Kulyk, *Liniiowe układy równań różniczkowych z macierzą zdegenerowaną* (po rosyjsku), Mathematical Journal **9**, nr 3 (Almaty 2009), s. 56-61.
12. I. Grod, V. L. Kulyk, *Konstrukcja funkcji Lapunowa dla pewnych liniowych rozszerzeń układów dynamicznych* (po ukraińsku), Visnyk of the Lviv University, Series Mechanical and Mathematical **72** (2010), s. 79-93.
13. V. L. Kulyk, A. N. Kulyk, N. V. Stepanenko, *Dopełnienie słabo regularnych liniowych rozszerzeń układów dynamicznych do regularnych* (po rosyjsku), Mathematical Journal **11**, nr 1 (Almaty 2011), s. 74-86.
14. V. L. Kulyk, E. Tkocz-Piszczyk, *Some constructions of Lyapunov function for linear extensions of dynamical systems*, Opuscula Mathematica **31**, nr 3 (2011), s. 399-409.
15. J. Kurzweil, *Invariant sets of differential systems*, Differencialnye Uravnenija **4**, nr 5 (1968), 785–797.

16. Y. A. Mitropolskij, A. M. Samoilenko, *Some questions on the theory of multifrequency oscillations*, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Preprint **14**, Kiev 1977.
17. Y. A. Mitropolskij, A. M. Samoilenko, D. I. Martynyuk, *Systems of evolution equations with periodic and quasiperiodic coefficients* (po rosyjsku), Naukova Dumka, Kiev 1984.
18. J. Moser, *A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. **47**, nr 11 (1961), 1824–1831.
19. Ju. A. Mitropolskij, A. M. Samoilenko, V. L. Kulyk, *Investigation of dichotomy of linear systems of differential equations using Lyapunov functions*, Naukova dumka, Kiev 1990.
20. Yu. A. Mitropolsky, A. M. Samoilenko, V. L. Kulyk, *Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems*, Taylor & Francis Inc, London 2003.
21. A. Pelczar, J. Szarski, *Wstęp do teorii równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1987.
22. E. N. Rosenwasser, *Lyapunov exponents in the theory of linear control systems*, Nauka, Moscow 1977.
23. R. J. Sacker, G. R. Sell, *Existence of dichotomies and invariant splittings for differential systems I*, Journal Diff. Equat. **15**, nr 3 (1974), 429–458. II, Journal Diff. Equat. **22**, nr 2 (1976), 478–496. III Journal Diff. Equat. **22** nr 2 (1976), 497–522. IV, Journal Diff. Equat. **27** nr 1 (1978), 106–137.
24. A. M. Samoilenko, *The conservation of an invariant torus under a perturbation*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34**, nr 6 (1970), 1219–1240.
25. A. M. Samoilenko, V. L. Kulik, *Exponential dichotomy of an invariant torus of dynamical systems*, Differentsialnye Uravneniya **15**, nr 8 (1979), 1434–1443.
26. A. M. Samoilenko, *On the existence of a unique Green function for the linear extension of a dynamical system on a torus*, Ukrainian Mathematical Journal **53**, nr 4 (2001), 584–594.